SEVERINA ANDRÉA DANTAS DE FARIAS

ASSIMILAÇÃO DE CONCEITOS NA MATEMÁTICA À DISTÂNCIA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Publicar Editora

2022

SEVERINA ANDRÉA DANTAS DE FARIAS

ASSIMILAÇÃO DE CONCEITOS NA MATEMÁTICA À DISTÂNCIA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Publicar Editora

2022

Editora Chefe
Patrícia Gonçalves de Freitas
Editor
Roger Goulart Mello
Diagramação
Roger Goulart Mello
Dandara Goulart Mello
Projeto gráfico e Edição de Arte
Patrícia Gonçalves de Freitas
Revisão
Os autores

Publicar Editora
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

F224a Farias, Severina Andréa Dantas de.
Assimilação de conceitos na matemática à distância [livro eletrônico] : uma experiência de ensino / Severina Andréa Dantas de Farias. – Rio de Janeiro, RJ: e-Publicar, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5364-032-0
DOI 10.47402/ed.ep.b202211600320

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino a distância. 3.Prática de ensino. I. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora e-Publicar
Rio de Janeiro – RJ – Brasil
contato@editorapublicar.com.br
www.editorapublicar.com.br

2022

AGRADECIMENTOS

Quando estou finalizando esta pesquisa é que percebo com maior clareza como as contribuições de professores, funcionários, colegas de turma, familiares, amigos, além da universidade, dos órgãos de apoio financeiro e dos professores do Departamento de Matemática e de Educação do Campo, entre outros grupos, foram fundamentais para sua realização. Uma tarefa difícil é expressar minha gratidão a todos estes em páginas de agradecimentos.

Meus sinceros agradecimentos à Professora Rogéria Gaudêncio do Rêgo, minha orientadora neste trabalho, pelas imprescindíveis reflexões que permitiram nortear e auxiliar a construção de todas as etapas desta pesquisa. Professora que me acompanhou na graduação, no mestrado e, agora, no doutorado.

As professoras Cibelle Castro de Assis e Clemilda Limeira, pela ajuda na pesquisa.

Ao Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática a distância, que tão gentilmente colaborou com a pesquisa. Através deles também estendo meus agradecimentos aos demais professores do Departamento de Matemática da UFPB.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação do Centro de Educação – PPGE/UFPB, pelo apoio prestado.

A todos os técnicos e funcionários do PPGE, pelo suporte e atenção aos alunos.

À UFPB, instituição que sempre me apoio no desenvolvimento deste trabalho através de suporte científico.

Aos meus amigos, pelo apoio, estímulo e compreensão nos momentos difíceis.

À minha família, em especial ao meu marido Jamilson, minha força. Aos meus filhos Cecília, Tales e Raquel, razão do meu viver.

Os agradecimentos também se estendem à minha mãe Áurea e aos meus irmãos: Adriana, Adeíza, Ana Lígia e Adriano, pelo apoio, mesmo distante, em todos os momentos que precisei.

A todos os meus alunos, razão da minha esperança na Educação.

Muito Obrigada.

Apresentação

O tema de investigação deste livro nasceu da necessidade de compreender melhor algumas questões que norteiam o ensino da Matemática na modalidade à distância, enquanto participava de uma disciplina na condição de tutora, no curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), em 2009.

Para tanto, desenvolvi no mestrado a pesquisa intitulada: *Uma análise da produção didática da matemática a distância: o caso da UFPB*, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE/CE/UFPB, tentando entender a dinâmica de produção do material didático impresso utilizado na UFPB Virtual, elaborado pelos professores do curso investigado, à época.

Como resultado desse estudo, constatei que havia, à época, pouca informação sobre a modalidade de Educação a Distância – EaD entre os participantes, dentre elas: a falta de conhecimento dos profissionais com relação ao perfil de sua clientela, falta de clareza quanto aos critérios de seleção dos conteúdos dos textos e ausência de indicação de modificações nos volumes produzidos e utilizados no curso.

Desta forma, dando prosseguimento à pesquisa, em 2014, desenvolvi o estudo de doutorado intitulado: *Ensino-Aprendizagem de Triângulos: um estudo de caso no curso de Licenciatura em Matemática a Distância*, no Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE/CE/UFPB, tema deste livro.

Com a proposta de estudar conceitos envolvendo o conteúdo triângulo, voltado para assimilação orientada à aprendizagem de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, na modalidade à distância, tomei como base teórica principal elementos da Teoria de Resolução de Problemas, considerando os fundamentos do ensino a distância e os preceitos da Matemática.

Outros autores também foram considerados nesse texto, tais como: Aretio (2004; 2006); Van de Walle (2009); Veloso (2000); Vigotsky (2007); Galperin (2009) e Talizina (2000), dentre outros, juntamente com documentos oficiais: Referenciais Curriculares da Paraíba (PARAIBA, 2010) e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2006).

Assim, o estudo foi caracterizado como estudo exploratório e descritivo, segundo seus objetivos, sendo um estudo de caso com relação a aquisição de dados e de cunho qualitativo e quantitativo com relação à análise realizada.

Deste modo, participaram da pesquisa 67 estudantes do 5º período do curso, distribuídos e atendidos pelos dezoitos municípios do estado da Paraíba. Adotou-se também instrumentos centrais de investigação, tais como: questionários semiestruturados, tarefas diversas, oficinas didáticas e diário de campo.

Logo, o trabalho foi organizado em capítulos, a saber: o primeiro, a Introdução, apresenta a justificativa da temática, problemática e hipótese, bem como os objetivos e a tese defendida no estudo.

Em seguida foi apresentado o Referencial Teórico (Capítulos 2, 3 e 4) composto pelos tópicos: O Estudo de Geometria, A Psicologia Pedagogia e a Resolução de Problemas como Estratégia no Sistema de tarefas, coerentes com a discussão da Educação a Distância, vislumbrando sua aplicação no ensino da matemática. Neste momento, baseou-se nos estudos de diversos autores como: Aretio (2004, 2006), Litto (2009, 2012), Filatro (2009), Vigotsky

(2007), Leontiev (1989), Galperin (2009), Talizina (2000) dentre outros, para tentar compreender as teorias que norteiam a temática em estudo.

No Capítulo 5 foi apresentado: As Tarefas na Perspectiva Geométrica: triângulos, aplicada na discussão conceitual de triângulo, bem como na análise de livros didáticos investigados, à época. Seguiu-se, discutindo os pressupostos metodológicos da pesquisa em Percurso Metodológico da Pesquisa (Capítulo 6), onde foram evidenciados o planejamento e as ações executadas em todas as etapas do trabalho.

Dando continuidade, apresentou-se os resultados de investigação e suas respectivas análises em Apresentação e Análise de Dados (Capítulo 7), baseado na elaboração de vinte e três tarefas, distribuídas em um total de setenta e três questões, realizadas durante sete meses de planejamento, elaboração, execução e avaliação, sendo considerando as cinco etapas das tarefas que caracterizaram o estudo: criação; material ou materializada; linguagem externa; linguagem interna; e mental. nos pressupostos teóricos adotados, tentando entender como se caracterizou e apresentou o fenômeno no estudo.

Por fim, nas Considerações Finais foram discutidas a tese e evidenciada sua confirmação através da assimilação orientada, tendo como base elementos da Teoria da Atividade, aliada a um sistema planejado e orientado às particularidades do ensino a distância, que potencializou os conceitos estudados, sendo verificados em todas as etapas do processo.

Ao final, constatou-se aumento na retenção e assimilação de conceitos invariantes e relevantes, relacionados ao conteúdo triângulo, caracterizando uma aprendizagem duradoura e de qualidade adquirida pelos participantes do estudo.

Diante das discussões propostas, convido o leitor a se debruçar nessa leitura, atento as abordagens que seguem.

A autora.

RESUMO

Este trabalho apresenta a organização e análise de uma proposta de ensino de Matemática, relacionada ao conteúdo de Triângulos, aplicada ao curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, na modalidade a distância. Para isso, tomamos como base teórica elementos da Teoria da Atividade, considerando as especificidades do ensino a distância. Adotamos em nosso referencial autores tais como: Aretio (2004; 2006); Van de Walle (2009); Veloso (2000); Vigotsky (2007); Galperin (2009) e Talizina (2000), dentre outros, juntamente com documentos oficiais como os Referenciais Curriculares da Paraíba (PARAIBA, 2010) e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2006). Participaram do estudo 67 estudantes do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da instituição de ensino investigada, distribuídos em 18 municípios do estado da Paraíba. Adotamos como metodologia, uma pesquisa do tipo descritiva e exploratória, segundo os objetivos de nosso estudo e, quanto ao levantamento e análise de dados, este se caracterizou como um estudo de caso, tendo como instrumentos centrais um questionário semiestruturado, tarefas elaboradas pelos pesquisadores, oficinas didáticas e um diário de campo. Ao longo do processo os estudantes realizaram 23 tarefas, distribuídas em um total de 73 questões, durante sete meses de planejamento, elaboração, execução e avaliação das cinco etapas que caracterizaram o estudo: criação; material ou materializada; linguagem externa; linguagem interna; e mental. Após a realização da análise dos dados, confirmamos a nossa tese de que através da assimilação orientada, tendo como base elementos da Teoria da Atividade, aliada a um sistema planejado tendo em conta as particularidades do ensino a distância, podemos potencializar o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos para os estudantes que participaram de todas as etapas do processo. Verificamos ao final da pesquisa e após certo tempo, uma maior retenção e assimilação de elementos relacionados ao conceito de triângulo, caracterizando uma aprendizagem de qualidade pelos participantes.

Palavras-chave: Educação a distância, Teoria da Atividade, Ensino de geometria, Licenciatura em Matemática a distância.

ABSTRACT

This paper presents the organization and analysis of a mathematics teaching proposal, related to the content of Triangles, applied to the Bachelor's Degree in Mathematics Distance from Federal University of Paraíba - UFPB, in the distance. For this, we take as theoretical basis Activity Theory elements, considering the specifics of distance education. We have adopted in our benchmark Aretio (2004; 2006);Van de Walle (2009), Veloso (2000), Vigotsky (2007), Galperin (2009) and Talizina (2000), among others, along with official documents such as Referenciais da Paraíba (PARAIBA, 2010) and the Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2006). Participated in the study 67 students of the 97 registered in 5th period of the Mathematics Degree in distance learning of the Universidade Federal da Paraíba, from 18 counties in the state. We adopted as the methodology of the study the descriptive and exploratory research, according to the study objectives. Regarding the acquisition and analysis of data, this study was characterized by being a case study which the main instruments were a semi-structured questionnaire, tasks designed by the researchers, educational workshops and a field diary. Throughout the process the students performed 23 tasks, containing a total of 73 questions, for seven months of planning, preparation, execution and evaluation of five steps that characterized the study: creation, material or materialized, external language, internal and mental language. Upon completion of the data analysis, we confirm our thesis that through oriented assimilation, based on an approximation of the Activity Theory, combined with a planned system we can enhance the teaching and learning of mathematics content for the students who participated in all stages of the study, being checked at the end of the study and after a certain time a greater retention of assimilation of action and the triangle concept, featuring a breakthrough in learning quality of the participants.

Keywords: Distance learning, activity theory, geometry teaching, mathematics degree in distance learning.

LISTA DE SIGLAS E/OU ABREVIATURAS

ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BOA	Base Orientadora da Aprendizagem
CCEN	Centro de Ciências Exatas e da Natureza
CE	Centro de Educação
CEDE	Centro de Estudos em Didáticas Específicas
CNE	Conselho Nacional de Educação
COPERVE	Comissão Permanente do Vestibular da UFPB
EAD	Educação a Distância
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GPIMEM	Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IES	Instituições de Ensino Superior
IFES	Instituto Federal de Ensino Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LABVIRT	Laboratório Virtual de Aprendizagem da UFSP
LDB	Diretrizes e Bases da Educação
LVA	Laboratórios Virtuais de Aprendizagem
MDI	Material Didático Impresso
MEB	Matemática para o Ensino Básico
MEC	Ministério da Educação
MEM	Movimento de Educação Matemática
MMC	Movimento da Matemática Clássica
MMM	Movimento da Matemática Moderna

MOODLE	Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment
NTIC	Novas Tecnologias de Informação e Comunicação
AO	Objetos de Aprendizagem
OLAT	Online Learning and Training
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPC	Projeto Político Curricular
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEB	Secretaria de Educação Básica
SEED	Secretaria de Educação à Distância
SEESP	Secretaria de Educação Especial
SESu	Secretaria de Educação Superior
SIMEC	Sistema Integrado de Monitoramento do Ministério de Educação
TAA	Teoria da Aproximação da Atividade
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFU	Universidade Federal de Uberlâncdia
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNSAM	Universidade Nacional de San Martim
UNIREDE	Universidade Virtual Pública do Brasil
ZDP	Zona de Desenvolvimento Próximo

1D	Uma dimensão
2D	Duas dimensões
3D	Três dimensões

Sumário

1 INTRODUÇÃO À TEMÁTICA DO ESTUDO

1.1 A ESCOLHA DA TEMÁTICA

A escolha do tema central de uma pesquisa científica é de suma importância, na medida em que levamos em consideração interesses relativos a aspectos sociais dos envolvidos. O pesquisador deve sentir-se motivado por uma necessidade real em compreender o seu problema de estudo, não apenas em uma visão disciplinar e acadêmica, mas também em uma esfera que possibilite uma contribuição relevante, em especial quando as investigações se dão no âmbito educacional.

A Educação Básica brasileira apresentou avanços nas últimas décadas, quanto à cobertura de atendimento, mas ainda enfrenta problemas de naturezas diversas, relacionadas à qualidade. No caso específico da Matemática, os baixos níveis de desempenho têm marcado os resultados de avaliações nacionais e internacionais das quais têm participado nossos estudantes.

Questões como deficiências na formação inicial e continuada de nossos docentes, a falta de materiais didáticos em escolas da rede pública, condições de trabalho inadequadas e a ausência de políticas públicas de médio e longo prazos para a educação, compreendem alguns dos diversos entraves para alcançarmos os padrões de excelência que desejamos para a formação de nossas crianças e jovens.

O espectro a partir do qual podemos analisar os problemas do ensino de Matemática, particularmente, é amplo, e jamais poderíamos abarcar com profundidade algum nuance se propuséssemos uma larga gama temática de discussão. Desse modo, o presente trabalho parte da premissa de que os resultados aqui apresentados possam trazer contribuições para a promoção da melhoria do ensino de Matemática.

A seleção da temática explorada na pesquisa surgiu de nossas experiências acadêmicas e profissionais e de reflexões sobre o ensino de conteúdos de Matemática, com o intuito de possibilitar sua aprendizagem, por meio de práticas educativas mais eficientes. Com esse pensamento, investigamos alguns estudos soviéticos, vislumbrando possibilidades de avanços qualitativos no ensino de Matemática, em ações que pudessem ser desenvolvidas nas salas de aulas virtuais de cursos de Licenciatura em Matemática, na forma semipresencial de ensino.

Praticamente, até a década de 1940, não foram realizadas experiências de escolarização que utilizassem meios distintos do escrito e da presença simultânea de professor e alunos em um mesmo ambiente físico. A partir dessa época, o rádio passou a ser considerado um bom recurso de apoio para essa forma diferente de ensinar e pouco a pouco foram incorporadas outras tecnologias para acompanhar o material escrito, presente em todas as ações educativas. Na realidade, a autêntica explosão da Educação a Distância – EaD, se deu da década de 1960 à de 1970, e todas as instituições que nasceram nestas décadas tiveram como suporte básico de estudo para os alunos, o material impresso.

A EaD utiliza o modo síncrono e/ou assíncrono de comunicação. O modo síncrono permite que o aluno estabeleça comunicação em tempo real com o professor e colegas. Como exemplo, temos as salas de bate papo, teleconferências, mensageiros instantâneos e lousa eletrônica, onde a interação aluno-aluno, aluno-professor, aluno-tutor ocorrem simultaneamente, possibilitando trocas de informações, debates e uma maior interação entre os participantes.

No modo assíncrono, a mensagem emitida por uma pessoa é recebida posteriormente, não sendo estabelecida comunicação em tempo real. O aluno recebe algum material através da tecnologia já pré-determinada, podendo ser um material impresso, com o uso do correio eletrônico ou por meio de fórum de discussão, e ele decide onde e como realizará o que lhe for proposto, enviando o material ao professor tão logo tenha concluído.

O processo de elaboração de materiais didáticos assíncronos para EaD foi objeto de investigação de algumas pesquisas de cunho nacional, sendo evidenciadas nos estudos de Palange (2012), Rodrigues Vaz (2012), Fernandes (2012) e Trimer (2012). Alguns autores acham que com o surgimento e ampliação da EaD, a tendência será abolir os textos didáticos impressos com a evolução da tecnologia, embora ainda hoje isso não ocorra, como afirma Filatro (2009, p. 89) "Hoje, apesar da crença de que uma boa interface extermina o texto, este permanece amplamente presente, [...]".

O material didático impresso continua sendo um meio fundamental para o desenvolvimento dos conteúdos de aprendizagem na EaD, sendo considerado autoconstrutivo. Segundo Aretio (2006), três quartos do tempo total do trabalho dos alunos europeus eram dedicados à leitura do material escrito que, no fim da década de 1980, manifestava-se como componente básico dos cursos a distância. Considerando as especificidades desses cursos, questiona-se como produzir materiais didáticos impressos ou não, que atendam as características consideradas. Essa preocupação contribuiu também para traçarmos nossa trajetória de investigação.

1.2 A TRAJETÓRIA DA INVESTIGAÇÃO

O nosso tema de investigação nasceu da necessidade de compreendermos melhor algumas questões que norteiam o ensino da Matemática, enquanto mediávamos uma disciplina na condição de tutora, no primeiro semestre de funcionamento do programa UFPB Virtual, no ano de 2009. Na ocasião nos depararmos com diversos questionamentos sobre o material didático utilizado em cursos na modalidade de ensino a distância e com dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer do semestre letivo.

Como a UFPB Virtual era um projeto que estava em fase de implantação, todos os profissionais nele envolvidos, tanto no âmbito administrativo e de apoio, quanto do corpo docente, mostravam-se inseguros com esta nova proposta de ensino, mas resolvemos enfrentar o desafio de compreender melhor o processo de criação e elaboração de material impresso específico para cursos de formação de professores em Matemática na modalidade a distância, denominados de Guias Didáticos.

Para tanto, em nosso Mestrado desenvolvemos a pesquisa intitulada: *Uma análise da produção didática da matemática a distância: o caso da UFPB*, tentando entender a dinâmica de produção do material didático impresso utilizado na UFPB Virtual, pelos professores autores do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) e do Centro de Educação (CE) dessa instituição de ensino superior.

O material didático impresso (MDI) do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB Virtual é denominado de Guia Didático e composto por oito volumes, disponibilizados aos alunos em cada semestre letivo do curso. Nele encontramos distribuídos e organizados os conteúdos de todos os componentes curriculares, de acordo com o planejamento dos semestres letivos. Os professores autores que produziram este material possuem, em sua maioria, uma vasta experiência no ensino da Matemática na Instituição.

Como resultado do estudo, identificamos que a construção e elaboração do material didático impresso do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPB/Virtual, apesar de produzidos por professores autores com uma vasta experiência no ensino de Matemática, possuíam pouca ou nenhuma familiaridade com a produção de material didático impresso com a proposta ideológica.

Outro ponto a ser destacado na pesquisa foi a constatação da pouca informação sobre a modalidade Educação a Distância – EaD, na construção do material, bem como a pouca produção cientifica a este respeito no momento da implantação do curso. Também evidenciamos questões como o pouco conhecimento do perfil do aluno antes de ser iniciada a elaboração dos textos didáticos; falta de clareza quanto aos critérios de seleção dos conteúdos dos textos; e ausência de indicação de terem sido feitas modificações nos volumes produzidos pelo Curso, na medida em que o material era utilizado. Por fim, discutimos como seria um material didático ideal na visão dos professores autores.

Com base em dez categorias eleitas segundo aporte teórico e documentos oficiais, no estudo concluímos que apenas quatro categorias (critérios de organização do texto, escolha da linguagem, experiência acadêmica dos profissionais e equipe multidisciplinar) foram contempladas de modo satisfatório, estando, as demais (levantamento do perfil do estudante, critérios de seleção de conteúdos, experiência dos profissionais na produção de textos, texto passível de modificação, orientações para produção de textos a distância, dificuldades na construção do texto) em desacordo com a propostas da EaD para cursos a distância, conforme a teoria adotada.

Nossa pesquisa, no Mestrado, foi fundamentada em teorias voltadas para o ensino de adultos, e, em particular, para o ensino na modalidade a distância, que também foram consideradas no presente estudo. O ponto de partida para nossas reflexões foi o fato de, ao longo de nosso desenvolvimento, vivenciarmos diferentes fases em relação à dependência e autonomia, tornando-nos, com o tempo, cada vez mais independentes e questionadores.

No âmbito escolar, se iniciamos nossa vida estudantil sujeitos à assistência de professores e funcionários dos estabelecimentos escolares, na adolescência essa dependência vai se alterando, e nos tornamos mais contestadores. Nessa fase, queremos saber o porquê de estudar o que a escola propõe na componente curricular.

Na idade adulta, com o acúmulo de experiências, somos capazes de tomar decisões de forma autônoma e escolher estilos sociais de vida. Aprendemos sozinhos; aprendemos com nossos próprios erros; somos capazes de identificar quando não entendemos algo ou quando precisamos de um novo conhecimento. Todas essas características geralmente só são adquiridas plenamente nessa etapa da vida.

As fases que os seres humanos passam e os fatos que ocorrem durante toda a sua vida influenciam diretamente sua capacidade de aprendizagem e essa evolução não pode ser ignorada pelos sistemas educacionais de ensino. As escolas, as universidades e outras instituições escolares, muitas vezes desconsideram essa evolução natural que, em situação normal, ocorre com o indivíduo, e o forçam a se enquadrar em sistemas padronizados e sem flexibilidade. Ensinar pessoas adultas com as mesmas propostas pedagógicas adotadas para ensinar crianças e jovens parece ser contraditório. O que deveria ter um aspecto disjunto, ou seja, complementar para as fases subsequentes, ainda requer um olhar especial do sistema educacional de ensino.

O princípio de ensinar e aprender relativos à criança foram introduzidos no século VII, e são utilizados até os dias de hoje. Este princípio possui correntes dominantes na relação dos pressupostos pedagógicos que podem ser entendidas na *perspectiva associacionista*; na *perspectiva cognitiva* e na *perspectiva situada.* Neste texto [1]discutiremos apenas a *perspectiva cognitiva* (FILATRO, 2009).

A *perspectiva cognitiva,* que aqui entendemos como formada pelas teorias construtivistas e socioconstrutivistas, considera a aprendizagem como estando ao alcance da compreensão. O foco central desta perspectiva está na ação do ambiente externo sobre os processos internos de percepção, armazenamento e recuperação de conhecimento. Acreditava-se que as pessoas aprendem a partir do momento que constroem seus próprios conceitos, integrando-os em suas estruturas cognitivas.

Considerando que o aluno adulto interage diferentemente da criança, a *Andragogia* se baseia no incremento de premissas pedagógicas como: a necessidade de conhecer (conhece a sua necessidade de aprendizagem e procura aplicar o conhecimento); o autoconceito do aluno (tem consciência da necessidade de conhecer e é capaz de suprir de forma independente esta carência); a valorização da experiência (no contexto social, a experiência do aprendiz se evidencia com sua aprendizagem); a prontidão para aprendizagem (o adulto está pronto para aprender o que decide, podendo também se negar a aprender o que é imposto por outros); a orientação para aprendizagem (a aprendizagem para a pessoa adulta tem que ter significado para o seu dia a dia) e a motivação (se encontra na sua própria vontade de crescimento).

Na proposta andragógica de ensino, o professor parte do conhecimento de mundo que o estudante adulto tem, utilizando suas experiências de vida e suas motivações intrínsecas. Este modelo está centrado na figura do discente, que, à medida que se desenvolve, sofre

[1] Aconselhamos, para um maior aprofundamento do estudo ver FARIAS e RÊGO (2009).

modificações, passando de indivíduos dependentes para indivíduos independentes, autodirecionados.

Suas experiências de vida são fundamentais para o seu aprendizado futuro e seus interesses pela aprendizagem estão diretamente ligados ao desenvolvimento de suas habilidades sociais e profissionais. Eles esperam uma imediata aplicação prática do que aprendem (aplicação da aprendizagem torna-se mais importante que aprender simplesmente um assunto) e possuem motivações internas específicas, como desejar promoções, mudanças de níveis e estabilidades profissional e social, passando a valorizar, com menos intensidade, notas de tarefas e de avaliações.

Segundo Aretio (2006), os adultos sofrem a influência de estímulos dos espaços reais de aprendizagem, utilizando os principais sentidos: audição, visão e tato, induzindo-os a sensações, associações e atitudes. Ao acompanhar uma aula apenas expositiva, o aluno adulto retém apenas dez por cento do que ouve, após setenta e duas horas. Entretanto, são capazes de lembrar oitenta e cinco por cento do que ouvem, veem e fazem, após o mesmo período. As informações mais lembradas são aquelas recebidas nos primeiros quinze minutos de uma exposição (ARETIO, 2006).

O ensino expositivo, baseado na memorização de definições e procedimentos, sem a participação dos estudantes e com imposição de regras a serem mecanizadas, sem compreensão, pode resultar numa experiência pouco motivadora, por retardar a autonomia, e não respeitar a capacidade de autodireção e investigação do estudante.

No ensino com essas características, muitos estudantes são penalizados com baixos conceitos e notas, muitas vezes marcando negativamente seu desenvolvimento escolar. Para evitar a constituição de uma relação negativa com o ensino, não se sugere o abandono do método expositivo, mas o acréscimo de novos elementos e práticas que possibilitem ao aluno compreender e utilizar de modo crítico e eficiente os conhecimentos por ele elaborados, aliado a metodologias que auxiliem sua formação.

Propor a migração de um aluno habituado às características destacadas do ensino tradicional para uma forma de ensino na qual ele tem papel ativo é, em especial na EaD, uma proposta desafiadora, que requer conhecimentos específicos de ambas as partes. O professor necessita de conhecimentos vinculados a esta proposta de ensino, como o domínio das ferramentas de ambientes de aprendizagem, conhecimentos de ensino-aprendizagem para pessoas adultas, conhecimentos e domínio de conteúdos específicos de informática, *software* e comunicação e, também, necessitam desenvolver trabalhos em grupos com equipes diversas, com diferentes abordagens, métodos e estilos de conhecimentos apropriados.

O aluno adulto, como uma experiência de vida mais ampla do que a das crianças, necessita empregar seu conhecimento em equipe, ter domínio em informática e em alguns *softwares* básicos, como editores de textos e planilhas. Também necessita de um bom domínio da escrita e da leitura para estabelecer uma boa comunicação, compreendendo e sendo compreendido pelo grupo.

Na EaD, a proposta andragógica pode ser usada em oposição à Pedagogia, como também podemos utilizar algumas das teorias pedagógicas, parcialmente adequadas para esta proposta de ensino. No Mestrado usamos essas teorias, na definição das categorias de análise do material impresso produzido para o Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPB. No presente trabalho, optamos pela proposta da andragogia, que segundo Filatro (2009, p. 107), a: "[A] autoaprendizagem se desenvolve em interdependência com a interaprendizagem entre pessoas que se agrupam por motivações e necessidades convergentes para atingir determinados objetivos […]". A essa concepção aliamos elementos da Teoria da Atividade, da qual tratamos adiante.

Na perspectiva andragógica, o currículo passa a ser elaborado em função da necessidade do estudante, uma vez que este vive envolvido em situações específicas, como trabalho, família e comunidade, sendo baseado em muitos aspectos com as propostas de Dewey (SALVADOR et al, 2005). O conceito de aprendizagem, discutido por Vigotsky (2007) também está inserido nessa proposta de ensino, ao valorizar a experiência pessoal do estudante no contexto social. A atribuição de significado às relações de ensino estimula a aprendizagem, por meio da participação ativa no processo.

Abrangendo o conceito de *andragogia* surge a *heutagogia,* palavra que tem origem da junção das partículas heuta (auto) e agogé (condução), sendo conceituada como a ciência da autoaprendizagem na perspectiva do conhecimento compartilhado. Esta proposta expande a "[...] concepção de andragogia ao reconhecer as experiências cotidianas como fonte de saber e incorpora a autodireção da aprendizagem como foco nas experiências [...]" (FILATRO, 2009, p.107).

Desde o início deste século, pesquisas como a de Hase e Kenyon (2000) vêm sendo realizadas, no intuito de desenvolver métodos que favoreçam o estudo autodirigido, possibilitando uma autogestão e uma cogestão da aprendizagem. Essa proposta está voltada para uma aprendizagem contendo as experiências práticas em um ambiente seguro, que possibilite ao estudante aprender com seus erros e acertos, não obedecendo a uma forma linear e rigidamente hierárquica.

Hase e Kenyon (2000) acreditam que o modelo da heutagogia é um processo voltado para a gestão da aprendizagem ativa, onde o aprendiz busca contextos internos à sua formação, avalia e compartilha experiências de vida. Neste processo de ensino, não existe professor e o aluno é o único responsável pela aprendizagem, geralmente, auxiliado pelas inovações tecnológicas. O aluno pode contar com um sistema de tutoria e por todos os recursos disponibilizados pelos ambientes de aprendizagens.

Nesta perspectiva, Freire (1995) propõe a inserção do adulto em sua realidade para que ele possa refletir e, a partir de situações concretas e diálogos com seus pares, problematizar sua realidade e transformar sua comunidade, pois consideramos que cada pessoa estabelece relações de múltiplas dimensões (histórica, política, social, biológica, psicológica e afetiva) e que possuem especificidades onde são produzidos conhecimentos que estão diretamente ligados aos seus significados.

Diante das disponibilidades do mundo moderno, seria um retrocesso, de acordo com Litto e Formiga (2009; 2012), continuarmos utilizando processos tradicionais no ensino e na aprendizagem dos jovens e adultos, sendo necessária uma flexibilidade na atuação dos espaços escolares e na produção do conhecimento. As pessoas muitas vezes imaginam que a proposta da EaD deve ser utilizada somente para cursos fechados e em curto prazo. Todavia, com a tecnologia que temos ao nosso dispor devemos estimular o uso destas em cursos abertos, flexíveis e de longa duração.

Com esse pensamento e o que aprendemos com o estudo que realizamos no Mestrado, buscamos, no Doutorado, analisar uma proposta de ensino diferenciada dos moldes predominantemente adotados em cursos de modalidade a distância, refletidos na estrutura atual dos Guias Didáticos, considerando as especificidades do ensino a distância, na Matemática.

A escolha do recorte relativo a Triângulos será justificada adiante, quando discutimos a importância desse conceito para a formação de nosso estudante da Educação Básica e, portanto, para a formação inicial de nossos licenciandos, considerando não apenas o domínio do conteúdo, mas ampliando sua visão, na perspectiva teórica e metodológica.

Realizamos também um breve estudo na tentativa de verificar as discussões teóricas atuais com relação à Teoria da Atividade em pesquisas no Brasil, que se aproximem de nossa proposta. Identificamos algumas relevantes, em nível de pesquisa de doutorado, sendo desenvolvidos em três grandes centros brasileiros, atualmente: a Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, a Universidade Federal de Uberlândia – UFU e a Universidade Estadual Paulista – UNESP. Dentre estas instituições de ensino destacamos algumas publicações mais recentes que convergem para nossa temática de estudo como:

- A pesquisa de Rezende e Valdes (2006) intitulada como: *GALPERIN: Implicações educacionais da Teoria de Formação das ações Mentais por Estágios,* onde os autores analisaram as implicações pedagógicas da teoria de Galperin sobre a formação das ações mentais por estágios, discorrendo sobre a utilização de ferramentas cognitivas como recursos auxiliares para o pensamento e a ascensão da aprendizagem;

- Ribeiro (2008) se propôs a estudar *o processo de aquisição da habilidade de planejar situações de ensino*, com professores do Ensino Fundamental, no qual constatou ao final do estudo que todos os participantes conseguiram alcançar um maior grau de desenvolvimento da habilidade de planejamento do ensino de conceitos;

- Oliveira (2011) produziu a tese intitulada: *O pensamento teórico e formação docente, apropriação de saberes da tradição lúdica na perspectiva da teoria da formação das ações mentais por etapas de P. Ya. Galperin*, realizando um estudo que formulou uma proposta de ensino para desenvolver a habilidade de identificar jogos populares tradicionais enquanto contribuição histórico-cultural e de desenvolvimento do indivíduo na formação inicial do professor de Educação Física;

- Bassan e Miller (2012) desenvolveram um estudo de doutorado intitulado: *Teoria da formação das ações mentais por etapas, de P. Galperin, e o processo de humanização para explicar como ocorre à formação das ações mentais conforme a Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais,* onde discutem como a orientação e a execução da tarefa de estudo pode ser uma via metodológica para o processo de ensino humanizador. O trabalho pedagógico da professora participante possibilitou a aprendizagem de seus estudantes por meio de um ensino organizado com ajudas e caracterizado pela orientação do professor. Como resultado os autores concluem que a Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais, constitui-se como uma possibilidade metodológica para a organização da atividade de ensino voltada à humanização do estudante, por propiciar o encaminhamento do trabalho pedagógico pela via do ensino sistêmico-teórico que desenvolve o pensamento teórico do estudante em sua relação com os dados concretos de sua existência, possibilitando sua formação como sujeitos autônomos, criativos, críticos, com capacidade de resolver problemas, e caracterizando, com isso, a atividade de ensino como um processo humanizador.

• Souto e Borba (2013) desenvolveram a tese intitulada: *Transformações Expansivas em um curso de Educação Matemática a Distância online*, onde os autores apresentam a noção de transformação expansiva utilizando o software Geogebra é um dos princípios que explicam a teoria da atividade em seu formato atual, em conjunto com a unidade de análise. Os resultados evidenciaram que os professores distribuídos em diversas localidades, conseguiram através das transformações expansivas utilizando a mídia, desenvolver a expansão do objeto e do motivo da atividade; a expansão da produção Matemática sobre cônicas; e a expansão dos artefatos, evidenciando um duplo papel que a mídia pode desempenhar em um sistema de atividade. Este ambiente, segundo os autores pode ser visto como um sistema de atividade seres-humanos-com-mídias;

• Galleguillos e Borba (2013) desenvolvem a tese intitulada: *A Atuação do Professor na Educação Matemática online,* propôs investigar as atuações de professor na condução de um curso de extensão *online*, a luz dos pressupostos da Teoria da Atividade. No estudo foram realizadas interações síncronas e assíncronas para a discussão de textos de Educação Matemática. Ao final os autores caracterizam a atuação do professor, à luz da Teoria da Atividade, como favorecedora da compreensão do trabalho realizado com os professores frente a uma aula complexa como, por exemplo, aquela em que se tenta desenvolver situações de investigação matemática em um ambiente de discussão *online*.

• Pereira e Núñez (2013) desenvolveram a tese intitulada: *Formação da habilidade de interpretar gráficos cartesianos em Licenciatura em Química segundo a Teoria de P. Ya. Galperin* onde os autores propõem a organização, o desenvolvimento e o estudo de um processo de formação da habilidade de interpretar gráficos cartesianos como parte do conhecimento profissional docente, a partir de um estudo de caso com seis estudantes do curso de Licenciatura em Química da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Para o desenvolvimento dessa habilidade, utilizaram como referencial a *Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais e dos Conceitos* de P. Ya. Galperin e seus seguintes indicadores qualitativos: forma da ação, grau de generalização, grau de consciência, grau de independência e grau de solidez. Os resultados mostraram a possibilidade de formar a habilidade com consciência do sistema de operações invariante, com alto grau de generalização e internalizada a invariante operacional no plano mental. Os estudantes manifestaram as contribuições positivas desse tipo de experiência formativa. A pesquisa, por sua vez, revelou a importância de se aprofundar na compreensão didática das individualidades no processo de assimilação, segundo a Teoria de Galperin, quando se trata da atualização de habilidades como parte do conhecimento profissional docente.

Assim, a questão central que direcionou nosso trabalho diante da pouca produção realizada sobre a temática foi entender: *quais as principais contribuições metodológicas ao processo de ensino e aprendizagem de triângulos podemos vislumbrar ao utilizarmos elementos da Teoria da Aproximação da Atividade, proposta por Talizina (2000; 2010) em um curso de Licenciatura em Matemática a distância?*

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando nossa temática e questão central de investigação, delimitamos como Objetivo Geral de nosso trabalho: *Analisar as contribuições metodológicas de aproximações à Teoria da Aproximação da Atividade ao processo de ensino/aprendizagem de Triângulos, no curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFPB Virtual.*

Visando alcançar nosso Objetivo Geral, elencamos os seguintes Objetivos Específicos:

1. Identificar o perfil dos alunos e da instituição de ensino investigada;

2. Diagnosticar o nível de desenvolvimento cognitivo dos estudantes participantes quanto ao conceito de Triângulo;

3. Estruturar um sistema didático baseado na Teoria da Aproximação da Atividade, visando à formação do conceito geral de Triângulo nos discentes participantes, composto por tarefas diversificadas;

4. Avaliar as adaptações necessárias para aplicação da proposta, respeitando a modalidade semipresencial e o uso de aplicativo dinâmico no ensino de Matemática.

1.4 A TESE

Por meio da revisão bibliográfica nos propomos a defender a Tese de que *através de uma orientação adequada, tendo como base à Teoria da Aproximação da Atividade, podemos potencializar o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos em cursos de Licenciatura em Matemática a distância.*

Para um melhor entendimento da problemática da pesquisa, realizamos um estudo teórico sobre as principais definições e diferenciações de que tratam os principais pressupostos que embasam a Educação a Distância e o uso de Aplicativos no Ensino da Matemática - em especial para o conceito de Triângulos, considerando elementos da Teoria da Atividade.

1.5 ESTRUTURA DO TEXTO

O presente trabalho de investigação está organizado em blocos: Introdução, Referencial Teórico, Metodologia da Pesquisa, Apresentação e Análise de Dados, Considerações Finais e Referências. A Introdução (Capítulo 1) apresenta a justificativa da escolha da temática do projeto, bem como os objetivos e a tese do presente estudo.

Em seguida, apresentamos o Referencial Teórico (Capítulos 2, 3 e 4) composto cinco tópicos: o estudo da Geometria; as teorias da Educação a Distância; a psicologia pedagógica; a resolução de problemas como metodologia de ensino na matemática. Neste momento discutimos várias propostas baseados nos estudos de diversos autores como: Aretio (2004, 2006), Litto (2009, 2012), Filatro (2009), Vigotsky (2007), Leontiev (1989), Galperin (2009), Talizina (2000) dentre outros, onde buscamos compreender as teorias que norteiam a temática em estudo.

No Capítulo 5 apresentamos as Tarefas didáticas e no seguinte os Pressupostos Metodológicos da pesquisa (Capítulo 6), que orientam o estudo e como foram planejadas e executadas todas as etapas estruturais do trabalho.

Seguimos para apresentação e análise de dados (Capítulo 7) onde discutimos os dados de estudo, baseado nos pressupostos teóricos adotados, tentando entender como se caracteriza e apresenta o fenômeno no estudo.

Por fim, apresentamos as Considerações Finais, nas quais discutimos a proposta inicial do estudo comparando-a aos estudos realizados, dados elencados e teorias adotadas. Chegamos a algumas proposições que podem colaborar para a melhoria de Cursos de Matemática a Distância e, indiretamente, a aprendizagem da Matemática, em geral.

Ao final do texto apresentamos as Referências, Apêndice e Anexo do estudo onde esboçamos todos os textos, livros, artigos utilizados na construção do texto, bem como as tarefas construídas para aquisição e análise de dados em cada etapa do estudo.

2 O ESTUDO DE GEOMETRIA

Para um melhor entendimento da problemática de pesquisa, realizamos um estudo teórico sobre as principais abordagens que envolvem a Geometria, segundo teóricos da área (VELOSO, 2000; EUCLIDES, 2009; ANDRADE e NACARATO, 2007; VAN DE WALLE, 2009, dentre outros). Em seguida apresentamos as orientações curriculares como bases legais, segundo os documentos oficiais de nosso país sobre a temática em questão. Finalizamos este Capítulo com uma abordagem centrada na aplicação do conteúdo Triângulo, na perspectiva da Geometria Dinâmica e segundo a Coleção de livros didáticos adotados como referência para o estudo.

2.1 A GEOMETRIA ONTEM E HOJE

A Geometria pode ser entendida, segundo Veloso (2000), como a compreensão do espaço em que vivemos. Compreender o espaço, neste sentido, significa entender a nossa própria existência no mundo, de forma matematizada.

Dienes e Golding (1977), pesquisadores da temática na década de 1970, entediam que a Geometria poderia ser compreendida pela exploração do espaço pelo homem, ao deslocar-se, observando o que acontece e sua intervenção nos objetos nele existentes. Esta concepção agrega a esta ciência a percepção das mudanças ou transformações com os objetos.

Em livros da Educação Básica de décadas passadas é comum encontrarmos a definição de Geometria atrelada a referenciais etimológicos, ou seja, à junção de *geo* (terra) e *metria* (medida), logo, a Geometria é entendida como a ciência que estuda a medida da terra. (TOLEDO e TOLEDO, 1997). Ampliamos nossa compreensão do que seja a Geometria, entendendo-a como a ciência que nos permite perceber o espaço, avaliando as características invariantes neste espaço. Também no espaço são investigadas suas formas e dimensões, determinando as propriedades, os elementos e suas transformações.

Durante vários séculos, a Geometria era praticamente concebida como sinônimo de Matemática. A estrutura dedutiva desse campo serviu de modelo para outros campos da área e compreendeu referência didática para ela. Com o tempo, esta assertiva foi perdendo seu valor. Veloso (2000) aponta que devido à descoberta axiomática de Pash e Hilbert, no século XVII, foram reveladas falhas na Geometria Clássica, fato que pode ter influenciado sua credibilidade nos anos posteriores.

Estudiosos como Freudenthal (1973, *apud* VELOSO, 2000) apontam que a Geometria pode ter falhado por não ter sido suficientemente dedutiva. Outros autores, como Veloso (2000), acreditam que a Geometria Dedutiva não permitia a reinvenção do conhecimento, em razão da própria natureza da dedução, e, por isso, apresentava uma abordagem frágil.

A matemática escolar foi influenciada no século passado, no que se refere ao ensino disciplinar, por três grandes movimentos: *Movimento da Matemática Clássica – MMC; Movimento da Matemática Moderna – MMM;* e *Movimento da Educação Matemática - MEM*. Estes três movimentos foram responsáveis por mudanças curriculares na Matemática que influenciaram as práticas escolares de ensino nos últimos anos, no Brasil e no mundo (VELOSO, 2000).

No campo da Geometria, mais especificamente, esses movimentos tiveram grande influência e foram responsáveis por mudanças que até hoje repercutem no ensino brasileiro e mundial. No primeiro movimento, o MMC, concebia-se o ensino de Matemática na perspectiva do formalismo clássico. A Geometria, nessa época, era vista sob duas perspectivas: as construções geométricas e o estudo da geometria euclidiana. Esta última perspectiva remete ao estado exato em que o matemático Euclides propôs esta ciência, em seu livro *Os Elementos,* distribuídos em treze manuscritos que datam do século 300 a. C. (VELOSO, 2000).

Nessa época, os conteúdos geométricos eram abordados com base nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, utilizando instrumentos como régua e compasso, em construções e demonstrações, a partir de inúmeros postulados, axiomas, lemas, corolários, escólios, definições e teoremas (EUCLIDES, 2009).

Em 1920 eram criados os primeiros grupos escolares no Brasil, e a organização do ensino na forma disciplinar se tornava obrigatória nas escolas. Até o ano de 1930, os conteúdos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria eram estudados separadamente, quando foi implementada no Brasil a Reforma Francisco Campos, criando a disciplina de Matemática nos currículos brasileiros (ROMANELII, 2005). O ensino de Geometria continuou sendo ministrado conforme o formalismo clássico, até por volta de 1960.

O segundo grande movimento a influenciar fortemente o ensino de Matemática no mundo, o MMM, iniciou-se na década de 1960 e predominou até os anos finais da década de 1970. Nesse período, o ensino de Matemática passou por intensas modificações, agora na perspectiva do formalismo moderno.

O MMM buscou uma aproximação maior entre o nível acadêmico superior de ensino com o nível do Ensino Básico. Os acadêmicos estudavam Teoria de Conjuntos no Ensino Superior, à época, e desejava-se trazer para o nível de escolarização básico conhecimentos acadêmicos sofisticados, estudados nos grandes centros superiores de ensino (VALENTE, 2013). Esse procedimento desencadeou um dos maiores *marcos* de reformas curriculares na área de Matemática, provocando alterações em sistemas educativos de diversos países, como foi o caso dos Estados Unidos, da França e de Portugal (VELOSO, 2000).

No Brasil, esse movimento tinha como propósito que os estudantes aprofundassem seus conhecimentos matemáticos. Na prática, o que se consolidou foi o trabalho com a linguagem de conjuntos em todos os anos de escolaridade, buscando-se concretizar ideias abstratas a partir desse estudo. Ao priorizar o rigor lógico, com ênfase na linguagem e conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos, ocorreu como efeito colateral o esvaziamento dos estudantes nas escolas, diante da proposta.

A Geometria, nesse período, sofreu, particularmente, um grande impacto. O contexto priorizava o estudo da Álgebra, em detrimento da Geometria nas instituições escolares brasileiras, que passou a ser ensinada de forma algebrizada, pelo professor, em uma linguagem e sequência de raciocínios distantes do estudante. (PAVANELLO, 1993). Como consequência ocorreu a remoção quase total da Geometria do currículo escolar, com seus conteúdos sendo apresentados nas partes finais dos Livros Didáticos, o que comprometeu a formação de gerações de estudantes, nesse campo.

A partir do final da década de 1970 houve, segundo Rêgo (2009), o reconhecimento da comunidade científica de que as mudanças que haviam sido introduzidas no início do MMM não provocaram os efeitos planejados. A substituição da Geometria pela álgebra provocou um esvaziamento de conteúdos e de situações desafiadoras. Hoje temos consciência, segundo Veloso (2000), de que a redução do ensino de Geometria do cenário educacional mundial provocou uma insuficiência de conhecimentos históricos e culturais da humanidade e que temos uma dívida histórica com muitos profissionais que se formaram entre as décadas de 1960 a 1980.

O ensino de Matemática no Brasil também sofreu as consequências da falência da proposta e até hoje temos professores em exercício que desconhecem os conceitos básicos geométricos. Alguns desses professores atuaram a sua vida profissional inteira sem ensinar conteúdos geométricos aos seus discentes, justificando essa lacuna pela falta de tempo de ministrar os conteúdos dos capítulos finais dos livros adotados na escola e, por não tê-lo feito, consequentemente, formaram outras gerações sem esses mesmos conhecimentos.

Em 1980, as preocupações de pesquisadores da área e de professores de Matemática em todo mundo se intensificaram, desencadeando o terceiro movimento voltado para o ensino de Matemática no século XX, o Movimento da Educação Matemática (MEM). Este período foi caracterizado pela busca de novas práticas pedagógicas voltadas para a compreensão da Matemática, seus significados e suas aplicações na vida das pessoas. Nessa tendência, coube ao professor o papel de observador, organizador, motivador e mediador para o objetivo que se quer alcançar, tornando a relação aluno/professor dialógica (BRASIL, 1998). Ainda estamos vivendo sob a égide desse último movimento, na perspectiva de que as pesquisas realizadas sobre a Educação Matemática ampliem nossa compreensão, para que, em um futuro não muito distante, possamos ensinar e aprender Matemática com mais qualidade.

No Brasil, propostas na direção de mudanças, dentro do último Movimento citado, se fizeram presentes em documentos oficiais produzidos e socializados desde então. Seguindo a ordem cronológica dos acontecimentos, de 1995 a 2002, o Conselho Nacional de Educação (CNE) apresentou Diretrizes Curriculares Nacionais, com força de lei, para as diferentes disciplinas escolares e o Ministério da Educação (MEC) elaborou Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para diferentes áreas, níveis e modalidades do Ensino Básico.

Os PCN de Matemática para o Ensino Fundamental (PCNEF) e para o Ensino Médio (PCNEM) buscaram expressar as contribuições das investigações e das experiências na área de Educação Matemática, trazendo aos professores orientações desde a formação do currículo, conteúdos propostos e procedimentos, até orientações sobre critérios de avaliação. No entanto, existem críticas contundentes não apenas aos PCN (BRASIL, 1997; 1998; 2000), mas também às políticas públicas brasileiras, no que se referem às questões curriculares, dando conta de que estas ainda não são suficientes para asseguramos uma equidade na educação.

A falta de ações curriculares, a formação de profissionais qualificados, as baixas remunerações, a falta de compromisso de alguns profissionais de educação, a falta de um sistema eficiente de acompanhamento avaliativo e a falta de propostas educativas exitosas são alguns dos elementos que comprometem o sistema de ensino no Brasil.

Na Geometria podem ser percebidos avanços através dos documentos oficiais sobre as orientações curriculares voltados para o campo do Espaço e Forma (BRASIL, 1997; 1998; PARAIBA, 2010), e Geometria (BRASIL, 2000; 2006), bem como nos avanços em pesquisas que apresentaram a temática Geometria como foco de estudo, socializadas em revistas, livros e congressos regionais, nacionais e internacionais, visando sua divulgação entre os educadores de Matemática.

Em uma análise das possíveis tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria no Brasil, Andrade e Nacarato (2007) classificaram os trabalhos publicados sobre a temática nos sete Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), categorizando cerca de 20% dos trabalhos apresentados, entre o período de 1987 a 2001, em sete subtemas: Geometria pelas Transformações; relação Álgebra e Geometria; Geometria na Perspectiva Curricular e/ou na Formação de Professores; Geometria na Perspectiva Teórica; Geometria na Perspectiva Histórica; Geometria Experimental; e Geometria em Ambientes Computacionais (ANDRADE, NACARATO, 2007). Os autores indicam também que, dentre as categorias apontadas pelo estudo, consideram-se como tendências emergentes, por apresentarem maior índice de discussão no ensino e na aplicação da Geometria, as categorias da Geometria Experimental e da Geometria em Ambientes Computacionais. Estes também são os dois focos principais de nosso estudo.

Os trabalhos realizados nas duas últimas categorias citadas, assumem um caráter mais exploratório e investigativo, buscando promover a melhoria da aprendizagem dos estudantes no campo da Geometria. Também se apresentam, de modo geral, como estudos de natureza interdisciplinar, agregando conhecimentos de outras áreas, como a Psicologia da Educação, da História e da Linguagem. Na perspectiva dinâmica, o ensino de Geometria assume novas formas de conceber e produzir conhecimentos para a sala de aula, ampliando os laços entre professor e aluno, numa perspectiva de negociação e produção de significados.

2.2 O ENSINO DE GEOMETRIA EM UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

A Geometria Exploratória abrange, no presente trabalho, as possibilidades de atividades geométricas que permitam ao sujeito explorar e (re)descobrir conceitos a partir da realização de reflexões, utilizando-se de recursos e estratégias diversas. Desse modo categorizamos, de acordo com Andrade e Nacarato (2007), a abordagem da Geometria Exploratória para o ensino de Matemática, a partir de dois eixos: a Geometria Experimental e a Geometria em Ambientes Computacionais.

A Geometria Experimental é uma tendência que prioriza o experimento, a atividade prática resultante da ação humana. Estas atividades podem ser apresentadas por meio de tarefas com experimentações e de manipulações de objetos concretos; desenhos e representações; construções de modelos e resolução de situações-problema.

A Geometria em Ambiente Computacional parte do mesmo princípio que a Experimental, só que utilizando *softwares* para realizar simulações e produzir representações geométricas. Ambas as abordagens podem ser apresentadas a partir de três perspectivas: a perspectiva sociocultural; a perspectiva das provas e argumentações/refutações; e a perspectiva do uso de novos aportes teóricos, segundo Andrade e Nacarato (2007).

A perspectiva sociocultural tem como base a sociedade e as práticas que caracterizam determinados grupos sociais. No ensino de Geometria, essa perspectiva visa a atribuição de significados a conceitos desse campo, utilizando diferentes metodologias ou abordagens, dentre as quais podemos destacar a Modelagem, a Investigação e a Resolução de Problemas. As abordagens são direcionadas à discussão de conteúdos sob a égide da interdisciplinaridade, nos contextos tomados como base de ação/reflexão, em atividades motivadoras e investigativas, tendo como objetivo promover a construção de conceitos através da manipulação de objetos e representações, atentando para sua associação à Matemática.

A perspectiva das provas e argumentações/refutações pressupõe um processo de negociação entre os agentes educativos através de atividades realizadas em grupos e/ou de forma individual. Essa negociação se inicia com a realização dos experimentos e seu registro no papel ou oralmente, discutindo-se diferenças de interpretações, justificativas, argumentações e estratégias de resolução, priorizando o diálogo e a possibilidade de promoção de consensos durante todo o processo.

Atuam nesta perspectiva, segundo Andrade e Nacarato (2007), os preceitos da teoria sociointeracionista, proposta por Vigotsky (2007); os conceitos da Didática da Matemática francesa; a teoria dos registros de representação semiótica, proposta por Raymond Duval (2007); a Teoria das Situações Didáticas, apresentada por Brousseau (2008); a teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1993); e as etapas hierárquicas do pensamento geométrico, no modelo proposto pelo casal van Hiele (1995). Esta última dimensão será foco de discussões posteriores em nosso trabalho.

As possibilidades apontadas por novos aportes teóricos vislumbram tendências que, provavelmente, serão a base de estudos futuros na Matemática (ANDRADE e NACARATO, 2007). Nesse contexto, a Psicologia, agregada à Educação, compõem uma nova área do conhecimento humano – a Psicopedagogia – que vem se apresentando em vários estudos da

Matemática nos últimos anos (PRIMI, 2004; NUNES, 2010). Tais investigações visam entender as principais dificuldades de aprendizagem matemática dos sujeitos nos ambientes escolares e, dentre elas, há aquelas dedicadas especificamente à área de Geometria.

Os aplicativos virtuais também são considerados como tendo grande potencial. Segundo Andrade e Nacarato (2007), o desenvolvimento da Geometria em Ambientes Computacionais pode assumir basicamente três apresentações: a Geometria em Ambientes de Geometria Dinâmica; a Geometria no Ambiente LOGO; e a Geometria utilizada em ambientes virtuais, sendo esta última uma nova possibilidade de utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC.

A Geometria em Ambientes Dinâmicos apresentou-se, no início de 1990, com uma característica predominantemente motivacional. Com o passar do tempo, as discussões sobre o uso de *software*s em ambientes escolares começaram a criar corpo, fortalecidas pelas contribuições ao processo de ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos, de pesquisas envolvendo o *Cabri Gèométre,* o *Geometricks,* o *Geometer's Sketchpad,* o *Tabulae e* o *Mangaba*, dentre outros.

O *Cabri,* por exemplo, foi utilizado na superação de obstáculos didáticos diversos no ensino de Geometria, tais como: o problema de imperfeições no desenho; as limitações da folha de papel; o não reconhecimento de figuras como sendo as mesmas, em razão de uma rotação; as dificuldades de visualização, na resolução de problemas; problemas de agilidade na apresentação de figuras bidimensionais e tridimensionais (SANTOS, 2009).

Nos Ambientes de Geometria Dinâmica, além de facilitar a produção de construções geométricas, também podemos modificá-las, já que é possível deformá-las e reconstitui-las novamente, quantas vezes forem necessárias, possibilitando ao usuário a sensação de construção/reconstrução genuína. Com o computador o conceito de movimento cria um novo sentido, na medida em que facilitamos o percurso inverso: a partir dos axiomas/postulados – dos elementos extraídos do movimento dinâmico da natureza – damos movimento e vida à Geometria.

A exploração da Geometria em Ambientes Virtuais de Aprendizagem – AVA, pode ocorrer por meio de *softwares* disponibilizados na Internet, que contém ferramentas para a criação; a elaboração de tutoriais; e o gerenciamento de atividades (SILVA, 2011). Esta é uma das tendências da atualidade. Os AVA são constituídos a partir do uso de diferentes recursos, que podem conjugar sons e imagens, cujo objetivo principal é proporcionar a discussão de ações fruto da interação homem – máquina – homem, ou seja, não só da interação com a máquina mas a partir da comunicação entre pessoas e grupos. São exemplos destes sistemas com uso mundial, as ferramentas de Ensino a Distância (EaD) e de trabalho colaborativo: *Online Learning and Training* (OLAT); Claroline e Moodle (SILVA, 2011). Este último é foco de nosso estudo.

Destacamos também os Laboratórios Virtuais de Aprendizagem - LVA que reúnem *softwares* em um repositório mantido quase sempre por instituições públicas (universidades e instituições governamentais), que objetivam disponibilizar recursos digitais *online* para apoio ao ensino e a aprendizagem. Atualmente, no Brasil, estes repositórios se dedicam, por exemplo, a exploração de conteúdos de Física e de Química, caso do Laboratório Virtual mantido pela Escola do Futuro da Universidade Federal de São Paulo – LABVIRT.

Há repositórios dedicados ao compartilhamento de informações acadêmicas e para troca de experiência entre educadores, como o Portal do Professor e o Portal Domínio Público (BRASIL, 2012), ambos mantidos pelo Ministério da Educação, e que oferecem em seus acervos sugestões de aulas, vídeos, livros, produção acadêmicas de instituições Federais de Ensino Superior - IFES, dentre outros recursos destinados aos profissionais da Educação (SILVA, 2011).

Existem também os Objetos de Aprendizagem – OA, que são softwares dedicados a simulações de objetos/fenômenos reais e que visam facilitar a compreensão de conceitos científicos e permitem uma ampla socialização de conhecimento. Os OA em geral possuem uma linguagem clara, direta e simples, e usam simuladores que recriam situações próximas do real e com as quais até então só podíamos interagir pessoalmente, facilitando acesso e reduzindo custos (SILVA, 2012).

No caso do ensino de Geometria destacam-se modelos, *softwares* e materiais disponibilizados em Laboratórios virtuais, como planificações, geoplanos, geoespaços, geradores de fractais, jogos e quebra-cabeças, em geral em endereços eletrônicos desenvolvidos em outros países, a exemplo do Laboratório de materiais manipulativos virtuais que pode ser acessado em instituições de ensino. Em nossa pesquisa utilizamos o *software* GeoGebra, do qual tratamos adiante.

2.3 ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Apesar dos grandes avanços na área do ensino de Geometria nos últimos anos, na Educação Básica há ainda muito a ser feito para alcançarmos o que propõem os documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1997; 1998; 2000) em relação ao ensino e a aprendizagem de conteúdos desse campo.

O estudo do Espaço e Forma, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCNEF (BRASIL, 1998), envolve três unidades de naturezas distintas: *o espaço físico; a Geometria e as representações gráficas.* Estas unidades devem se integrar e interagir com o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial do estudante, priorizando a elaboração de sistemas que abordem as propriedades geométricas, em uma linguagem que permita ao estudante elaborar, compreender e operacionalizar com codificações e decodificações de suas representações no decorrer dos anos escolares.

Nesse sentido, as orientações didáticas contidas nos PCN para a área Espaço e Forma (BRASIL, 1998) são de que sejam trabalhadas a leitura e a utilização de mapas diversos, plantas e maquetes em sala de aula. Tais atividades auxiliarão na compreensão dos conceitos matemáticos que abordam as coordenadas cartesianas, escalas e proporcionalidade.

Outro ponto discutido nessas orientações curriculares diz respeito ao campo das figuras geométricas a partir de tarefas de classificação, propostas com base na observação das propriedades e regularidades geométricas. O uso de materiais manipulativos também é indicado em atividades de composição e decomposição de figuras planas, sendo o Tangram e os Poliminós exemplos de recursos didáticos que podem ser utilizados pelo professor, visando que o estudante compreenda o cálculo de área de regiões planas.

No caso dos manipulativos, o objetivo do material é ajudar o estudante a visualizar e fazer conjecturas, pois os PCN (BRASIL, 1998) orientam que o professor, junto com seus alunos, proponha a construção de caminhos, a partir de experiências concretas, que levem os estudantes a compreenderem a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas.

O documento ressalta que os resultados obtidos por meio da manipulação de materiais concretos não constituem provas matemáticas, mas servem como elementos desencadeadores de conjecturas e modelos que facilitarão a compreensão/organização de justificativas formais. Os PCN apresentam como exemplo, nessa direção, uma atividade relativa à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, no intuito de que os alunos provem que o resultado é 180º, o que não pode ser feito utilizando-se a decomposição e a composição de um modelo material, envolvendo um triângulo específico.

Também é sugerido no documento a realização de atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano como uma reflexão, translação, rotação, ampliação e/ou redução de representação matemáticas, o que pode ser feito com a colaboração de *softwares* específicos para a Matemática. Tais aplicativos devem possibilitar a abordagem de conceitos como o de semelhança de figuras geométricas (BRASIL, 1998).

Nas orientações curriculares para o Ensino Médio, em relação à Geometria (BRASIL, 2000; 2006), os *softwares* ganham destaque, assim como o uso de tecnologias em geral. São apresentados e discutidos usos de aplicativos que dispõem de régua e compasso virtuais, com um vasto repertório em um *menu* de construção, na linguagem clássica da Geometria (a partir das ideias de reta perpendicular, ponto médio, bissetriz e outras) e ainda a possibilidade de aplicar movimento a um objeto construído, preservando as suas propriedades geométricas. A interação entre a representação do objeto matemático e o sujeito, por meio de *softwares*, proposta nas orientações curriculares, compreende uma ação no âmbito da Geometria Dinâmica.

A modelação matemática é proposta nas orientações curriculares do Ensino Médio como atividade para interligar a Geometria, os *softwares* dinâmicos, ou seja, que facilitam o trabalho com transformações, e situações do cotidiano, assim como orienta que o trabalho com a Geometria Analítica, integrando Álgebra e Geometria, também podem ser abordados com a ajuda de *softwares,* nesse nível de escolaridade.

A Geometria é destacada como campo motivador para o desenvolvimento da formação matemática do estudante, em razão das aplicações a necessidades humanas, ao longo da história. Porém, apesar de sua potencialidade como instrumento para uso no cotidiano, ao final da Educação Básica espera-se que o estudante seja capaz de compreender demonstrações matemáticas formais, que resultam em fórmulas como a da área do círculo, o princípio de Cavalieri, o Teorema de Tales e o de Pitágoras, dentre outros.

Apesar da indicação dos documentos oficiais do país, de se iniciar o estudo da Geometria a partir de elementos mais intuitivos, nos anos iniciais, indo na direção de níveis mais complexos e formais, ao longo do processo de escolarização, nas salas de aulas ainda há muito que avançar. Santos (2009), por exemplo, afirma que o ensino de Geometria no Brasil encontra-se doente. Tal afirmação é amparada na formação profissional acadêmica atual dos profissionais de educação que, segundo o autor, não oferecem subsídios para uma discussão ampla sobre a Geometria, logo, não se ensina o que não se sabe.

Esse autor discute também a grande sobrecarga de trabalho que, muitas vezes, não permite ao professor refletir sobre sua prática. Por fim, apesar de não constituírem mais, em geral, os capítulos finais dos livros didáticos de Matemática, ainda há muitos problemas nesse recurso de apoio à prática do professor, na medida em que os conteúdos geométricos encontram-se desvinculados dos demais ou são apresentados de maneira inadequada, descontextualizados ou centrados na memorização de procedimentos. Todas estas situações colaboram para que o ensino de Geometria seja insuficiente nos ambientes escolares e a questão é: *o que fazer diante dessa situação?*

Nesse contexto, partimos da ideia de que é possível desenvolver tarefas didáticas que auxiliem os estudantes no desenvolvimento do pensamento geométrico, a partir de níveis progressivos de compreensão, aliadas à utilização de *softwares geométricos.* Todos estes recursos devem ser orientados de forma adequada e apresentam-se como possibilidades para o ensino de Matemática e, em especial, de Geometria. Essas propostas serão discutidas nos textos que seguem.

2.4 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O pensamento geométrico se caracteriza por ser um tipo especial de raciocínio que possibilita ao sujeito pensar e raciocinar em contextos específicos (VAN DE WALLE, 2009). A exploração do espaço à nossa volta possibilita que desenvolvamos um entendimento do mundo, por meio de elementos matemáticos, como noções de medida, do raciocínio proporcional, e do pensamento aritmético. Se em um primeiro momento a relação com os elementos geométricos parece ser intuitiva, uma vez que estamos em permanente imersão no espaço, por que muitos alunos apresentam dificuldades na compreensão de conteúdos da Geometria?

Nasser e Sannt'Anna (2000), com base nos estudos do casal Van Hiele (1959), tentam responder essa e outras questões: como se constrói e desenvolve o raciocínio geométrico? A elaboração de conceitos geométricos está sujeita a uma idade cronológica? É possível facilitar e antecipar a formação desses conceitos através de uma orientação apropriada?

Nesse processo, as pesquisadoras realizaram estudos entre as décadas de 1990 e 2000, com estudantes do 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental, chegando à seguinte conclusão: a Geometria escolar deve ser orientada segundo um modelo didático que permita um entendimento sequencial de níveis de compreensão de conceitos. Tais níveis são hierárquicos e foram baseados na proposta criada pelos pesquisadores holandeses Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele, no início da década de 1960.

A aquisição de conceitos geométricos não está sujeita a uma ordem cronológica, ou seja, todas as pessoas podem aprender Geometria, independentemente de sua idade, e pessoas na idade adulta podem estar no nível mais elementar da escala proposta na Teoria, o qual atribuímos, geralmente, a crianças nos primeiros anos de escolaridade (1º ao 5º Anos).

Nasser e Sannt'Anna (2000) concluíram que o aumento da idade não garante o desenvolvimento do pensamento geométrico se este não foi desenvolvido sequencialmente, seguindo níveis de complexidade cada vez maior, em relação à formação de conceitos geométricos. Assim, uma mudança de nível ocorre mediante a adequação de tarefas ao nível de conhecimento de cada sujeito e independe de sua idade.

A Teoria de van Hiele (1959) baseou-se na psicologia genética de Piaget, e constitui um modelo para a aprendizagem na Geometria. Neste sentido, a pretensão é que o estudante alcance níveis de pensamento geométrico cada vez mais elaborados, através da criação de redes de relações construídas por ele, de forma lógica e dedutiva, ou seja, o pensamento geométrico evolui a partir das próprias experiências do discente (SANTOS, 2009).

Segundo a Teoria de van Hiele, as redes de relações seriam constituídas por cinco níveis de pensamento geométrico distintos, que podem ser categorizados em: *reconhecimento; análise; abstração; dedução e rigor,* discutidos adiante. Tais níveis devem acompanhar todo o processo de escolarização do sujeito, iniciando-se no Ensino Fundamental e percorrendo todos os anos de escolaridade básica até o Ensino Superior. Por ser hierárquico, a escola muitas vezes não atenta para a identificação do nível de conhecimento geométrico no qual o estudante se encontra, sendo inviável a discussão de níveis mais complexos sem a garantia do conhecimento anterior. (VAN DE WALLE, 2009).

No primeiro nível da Teoria de van Hiele, do *reconhecimento* geométrico, o estudante entra em contato com a nomenclatura das figuras geométricas básicas, em atividades que envolvem a sua aparência global e não as suas propriedades. O sujeito é capaz de reconhecer um quadrado e um retângulo e de reproduzi-los, mas não percebe que o mesmo faz parte de uma mesma classe (quadriláteros), pois suas aparências são diferentes. As figuras ganham um *status* de objetos e não são compreendidas como representações pertencentes a uma determinada classe. Este nível geralmente é trabalhado na escola durante os primeiros anos de escolaridade do Ensino Fundamental.

No segundo nível, da *análise,* o estudante deve ser instigado a reconhecer as propriedades das figuras e utilizá-las de maneira adequada na resolução de situações diversas. As tarefas devem atentar para, por exemplo, as propriedades dos quadrados com relação ao número de lados e tipos de ângulos internos. Conceitos como lados opostos, adjacentes e paralelos também devem ter sua elaboração potencializada.

O terceiro nível é o da *abstração*. Nele o estudante é estimulado a perceber que as propriedades geométricas se deduzem umas das outras, fazendo uso da argumentação lógica informal, e a ordenação de classe das figuras geométricas deve ser observada. O estudante precisa ser alertado sobre a importância de usarmos uma definição matemática, de forma clara e matematicamente correta, e para o fato de, muitas vezes, usarmos propriedades que decorrem de outras. Por exemplo, na definição de um quadrilátero devemos considerar as propriedades mínimas que definem esse objeto e/ou sua representação. Ou seja, o número de lados.

Também é importante serem instigadas discussões sobre relações internas de grupos de figuras como, por exemplo, o fato do quadrado também ser um retângulo (ou um losango); que existem diversos tipos de quadriláteros que podem ser definidos com relação ao número de lados, de acordo com as características de seus ângulos. Outro exemplo seria propor atividades que auxiliassem o estudante a perceber que da propriedade dos ângulos alternos internos podemos obter a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, totalizando 180º.

Seguindo para o próximo nível de complexidade, segundo a Teoria de van Hiele, temos a *dedução*. Nele o estudante caminha na direção do processo dedutivo e das demonstrações matemáticas, devendo ser capaz de ordenar logicamente todas as proposições discutidas nos níveis anteriores, realizando o seu reconhecimento a partir de condições necessárias e suficientes relativas aos conceitos geométricos em tela. As demonstrações tornam-se mais complexas e o estudante é convidado a refletir, por exemplo, sobre o conceito de triângulo a partir de suas congruências, o que deve ocorrer também com todos os quadriláteros.

O quinto e último nível da teoria de van Hiele para o estudo da Geometria é o *rigor.* Este nível apresenta uma grande complexidade em relação aos anteriores, sendo realizadas todas as operações pelo estudante de forma puramente abstrata, favorecendo o pensamento geométrico baseado em demonstrações formais. Neste momento, o aluno deve desenvolver o discernimento matemático em uma estrutura que lhe permitirá a elaboração de conhecimentos geométricos mais refinados. Nele o aluno deverá ser capaz de transitar entre as diferentes facetas da Geometria (plana; espacial; analítica; projetiva), chegando a conceitos que extrapolam a Geometria Euclidiana, contidos nas Geometrias não euclidianas.

Nasser e Sannt'Anna (2000) verificaram em seus estudos que, mesmo em estudantes com bom desempenho escolar, foram identificadas dificuldades na transição do segundo nível de van Hiele para o terceiro. A justificativa estaria na falta de concentração de tarefas no processo dedutivo, quando são solicitadas, ao aluno, argumentações, justificativas ou provas. No intuito de orientar os alunos nessa fase, as autoras propõem que as congruências e semelhanças de figuras planas sejam abordadas no terceiro nível, instigando o sujeito a entender o processo de inclusão de classe das propriedades geométricas.

Outro aspecto importante apontado pelas pesquisadoras foi à antecipação dos *quadriláteros* pelos *triângulos*, havendo assim uma inversão com relação aos conteúdos propostos nos livros escolares. Esse fato oportuniza ao estudante investigar as propriedades mínimas e necessárias para definirmos uma representação geométrica.

Nasser (1998), ao discutir como ocorre a construção do pensamento geométrico, embasada em diversas teorias da aprendizagem humana, apontou críticas ao modelo apresentado por Van Hiele ao questionar a rigidez na hierarquização dessa Teoria, por ter identificado, em seus estudos, que um aluno pode evidenciar pensamentos característicos de dois níveis diferentes, ao resolver tarefas distintas. Assim, pode-se acreditar que os níveis de van Hiele não ocorrem de modo discreto, mas sim de forma contínua, permitindo que o estudante adquira diferentes graus de aquisição de cada um dos níveis propostos.

Nasser conclui que a maior contribuição da Toeira é possibilitar o trabalho, de forma exitosa, com os três primeiros níveis – visualização, análise e dedução informal – encorajando processo de descobertas que refletem, de perto, a forma como a Matemática é criada. Um matemático inicialmente visualiza e analisa um problema, fazendo conjecturas, antes de realizar provas e demonstrações. Serão os três primeiros níveis da Teoria, que abrangem a Geometria trabalhada na Educação Básica, que servirão como base para a elaboração das tarefas do nosso estudo, no âmbito da Geometria Dinâmica.

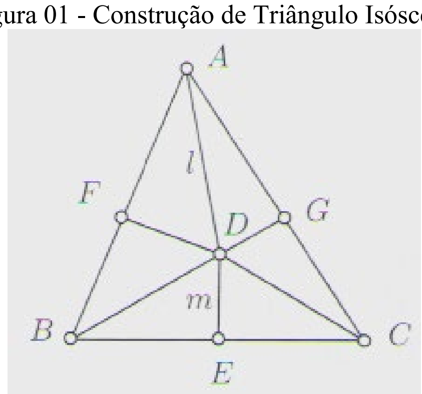
2.5 A GEOMETRIA DINÂMICA

A primeira ideia que temos da palavra dinâmica é relativa a movimento, àquilo que não é estático. Em se tratando de Geometria, podemos pensar no estudo de formas e dimensões priorizando o movimento. Segundo King e Schattschneider (2003), a Geometria Dinâmica remete a uma Geometria ativa que possibilita várias investigações matemáticas, utilizando programas interativos de computação.

Partindo da ideia do poder que têm as representações, na Matemática, e sua potencialidade na promoção de uma maior compreensão de conceitos, é que usamos muitas figuras quando estudamos Geometria. As figuras ajudam no esboço e na demonstração de certas propriedades, mas também podem gerar equívocos. Para compreendermos esta última assertiva, vejamos o exemplo clássico da demonstração do seguinte Teorema: *Todos os triângulos são isósceles*, apresentada por King e Schattschneider (2003, p. 7):

> Demonstração: Seja ABC um triângulo e seja *l* a bissetriz do ângulo interno em A, *m* a mediatriz de BC intersectando BC no ponto médio E e D a intersecção de *l* com *m*. Sejam tiradas por D as perpendiculares a AB e AC, intersectando esses lados em F e G respectivamente. Finalmente, tracem-se os segmentos DB e DC. A figura abaixo mostra o esboço da situação.

Figura 01 - Construção de Triângulo Isósceles



Fonte: King e Schattschneider (2003, p. 7)

Um exame atento à construção ajuda-nos a perceber que os triângulos *BDE* e *EDC* são congruentes bem como o são os triângulos *BFD* e *CGD* e, portanto, os ângulos B e C são congruentes, o que implica em *ABC* ser isósceles. Mas o que há de errado nessa demonstração, já que sabemos que nem todo triângulo é isósceles? King e Schattschneider (2003) afirmam que nada há de errado em relação à cadeia de raciocínio matemático, mas que a argumentação compreende uma falácia, induzida pela figura, e apresentada por muitos livros de Matemática nos últimos 100 anos. A figura 01 apresenta uma informação errada, pois nunca poderia ocorrer a intersecção de *l* e *m* no interior do triângulo ABC. Isso se deu porque assumimos hipóteses extras ou ignoramos os casos omissos no problema ou ainda deduzimos resultados devido à imperfeição do desenho (KING; SCHATTSCHNEIDER, 2003).

Exemplo como esse alerta para a necessidade de construirmos figuras priorizando o rigor matemático, em lugar de utilizarmos esboços rápidos e mal acabados. Devemos atentar para a correta colocação de pontos, segmentos, bissetrizes, mediatrizes, e outros elementos que se fizerem necessários, quando estamos representando uma ideia geométrica. Mesmo assim, dependemos de instrumentos como régua, compasso e lápis, que têm imperfeições, bem como de tempo e de paciência, demandados particularmente quando as figuras possuem um alto grau de complexidade. O que fazer então?

Com o uso de ferramentas da Geometria Dinâmica, ao menos o problema que concerne a desenhos mal elaborados pode ser resolvido. O *software* geométrico, além disso, pode nos auxiliar a testar as condições geométricas possíveis, sendo suas configurações (bissetriz, mediana, perpendiculares, dentre outros) avaliadas por meio de vários exemplos, o que evitaria o erro observado na demonstração destacada anteriormente, baseada em um caso particular.

Depois de sua construção, com o auxílio do *software*, uma figura pode sofrer modificações, sem alterar suas características básicas, que estariam preservadas. Quase que imediatamente, todas as modificações obedecem aos comandos do operador, permitindo-lhe realizar uma investigação de qualidade, através da manipulação da figura.

O centro da atenção do professor também mudaria. Agora este não mais estaria na busca de exímios estudantes que utilizassem bem instrumentos de desenho. Seu foco estaria na organização de atividades que possibilitassem aos alunos realizar todos os passos com coerência e compreensão, atentando para as conjecturas e propriedades dos elementos geométricos nelas presentes.

Hoje existem *softwares* livres que permitem rapidez e sofisticação na elaboração e execução de representações geométricas que seriam muito complexas para construção utilizando régua e compasso e com riscos de grandes imprecisões. O fato de os computadores processarem informações de modo cada vez mais rápido, serem mais compactos e terem interfaces e sistemas amigáveis, potencializa seu uso no ensino de Matemática e dos demais componentes curriculares.

Os programas que utilizam a Geometria Dinâmica como base de manipulação são diversos no mercado, a exemplo do *Geometer's Sketcpad*, do *Cabri-Géomètric II*, do *Geometry Inventor*, do *Geogebra*, dentre outros, que possuem uma capacidade de produção matemática complexa, fornecendo ao operador, ferramentas e condições necessárias para efetuarem construções geométricas complexas, passíveis de repetição, quantas vezes se desejar. Eles oferecem elementos livres de configurações que podem ser movidos, arrastados, esticados, ajustando-se automaticamente e preservando todas as relações iniciais e condições invariantes.

A partir de uma sequência contínua, sem saltos no desenho, o computador mostra ao operador uma mudança em tempo real de sua construção geométrica, permitindo-lhe atentar para propriedades invariantes, como congruências e interseções, e elementos que a constituem, como retas e polígonos, com rapidez e autoconfiguração que só o computador permite.

É possível também atentarmos para transformações, como rotações, translações e dilatações, atuando sobre as figuras, o que permite uma alteração total ou parcial na representação, que pode ser definida a partir de instruções fixas ou dinâmicas do *software*. Os programas utilizados na Geometria Dinâmica também têm a possibilidade de registro (na memória da máquina) da sequência de passos que conduziram o operador a uma determinada construção, podendo usá-la para produzir outras configurações.

Podemos com relativa facilidade visualizar passos de uma construção, que interligam a Geometria Analítica à Geometria plana e espacial, por exemplo, criando sistemas de coordenadas, traçando gráficos e figuras, utilizando-se uma linguagem interativa, muito próxima da linguagem matemática. Também podemos acrescentar textos, caracteres especiais, ilustrações, salvar ou imprimir as produções para utilização em sala de aula.

King e Schattschneider (2003) indicam alguns itens necessários para sistemas dinâmicos na Geometria, que caracterizam sua utilização, tais como: visão geral dos conteúdos; rigor nas construções; visualização, exploração e descoberta; demonstração; transformações; lugares geométricos; simulação e micromundos.

A visão geral dos conteúdos matemáticos é um item extremamente necessário, pois sempre que um *software* dinâmico for introduzido no ambiente escolar é interessante atentar para seu *design,* suas ferramentas e utilização, verificando se este permite levantar diversas conjecturas ao ensino e a investigação de conteúdos matemáticos. A leitura dos tutoriais é de grande importância antes da utilização e apresentação de um *software* em sala de aula.

O rigor nas construções também é um item necessário aos *softwares* dinâmicos. A utilização de um simulador de régua e compasso para a Geometria euclidiana é fundamental. As medições produzidas por qualquer *software* devem evidenciar, de forma clara, os limites de tolerância dos cálculos a serem executados, na aproximação dos resultados numéricos e na resolução das máquinas.

A apresentação de pontos colineares, a razão da invariância de dois segmentos ou, ainda, a facilidade de plotar um desenho em perspectiva, devem ser itens investigados na manipulação das ferramentas dos *softwares* dinâmicos. De acordo com King e Schattschneider (2003), os *softwares* aqui mencionados indicaram um nível de confiança alto quanto ao rigor matemático.

A qualidade de visualização também deve ser observada, pois ela pode auxiliar os estudantes a identificarem elementos matemáticos em uma tarefa. Ao utilizar o *software* na resolução de um problema, os estudantes constroem, modificam e reconstroem, de forma contínua, várias hipóteses, identificam erros, testam suas conjecturas, por meio de modificações instantâneas realizadas nas representações produzidas por ele, em tempo real. Os conceitos abstratos de variável, incógnita, função e invariância ganham significado com a ajuda da visualização, na medida em que modelos mentais são construídos no processo. Além disso, a criatividade também é aguçada em um ambiente dinâmico, em virtude da possibilidade de exploração livre e descobertas, a partir da gama de ferramentas disponíveis.

A exploração e a descoberta devem ser instigadas nos estudantes para que estes possam "viver" a experiência de demostrar e validar teoremas e definições matemáticas, processos muitas vezes negados nas aulas que obedecem a uma perspectiva tradicional, centrada no professor. O pensamento matemático é potencializado quando temos a oportunidade de realizar explorações, orientadas ou não, testar hipóteses matemáticas a partir de modelos elaborados a partir da observação, sem a antecipação de resultados, possibilitando um maior envolvimento do investigador na descoberta de relações e propriedades.

A demonstração é uma característica necessária de um *software* dinâmico. Embora os programas que utilizam essa tecnologia não façam demonstrações, estes podem oferecer pistas que levem o estudante, através de uma evidência experimental, à demonstração. A motivação e a convicção são itens necessários para desenvolver no estudante o pensamento geométrico na experimentação com figuras dinâmicas. E se alguns professores temem que o uso de um *software* possa levar o estudante a pensar que uma evidência convincente substitui a demonstração formal de um teorema, King e Schattschneider (2003) observaram, em seus estudos, que ocorre a situação oposta: os estudantes são encorajados pelo *software* a evidenciar a demonstração, por meio de suas conjecturas.

Quanto à transformação, qualquer *software* que utilize a proposta de Geometria Dinâmica permite realizar transformações de representações. As isometrias e semelhanças são exemplos de transformações que podem ser utilizadas pelos estudantes, movendo, ampliando ou reduzindo figuras e a observação de uma transformação no plano euclidiano possibilita ao estudante realizar elegantes demonstrações na Matemática (KING; SCHATTSCHNEIDER, 2003).

Os lugares geométricos são de fácil visualização ao usarmos um software dinâmico, para exemplificar, imaginemos um ponto se movendo em conjunto com outras partes da representação, sendo proposto ao estudante identificar o lugar geométrico percorrido por esse ponto, dispondo apenas da lousa tradicional. Um *software* de Geometria Dinâmica dispõe de ferramentas que registram o lugar geométrico de qualquer configuração específica, sendo adaptadas para exibi-lo no caminho indicado pelo operador. As observações de pontos descrevendo uma determinada trajetória, a criação de várias configurações como elipses, a inversão de cônicas, por exemplo, descrevem lugares geométricos que podem ser identificados pelos estudantes.

Outro item importante na escolha de um software de Geometria Dinâmica diz respeito a simulação de objetos. A capacidade do *software* de arrastar pontos, de traçar lugares geométricos e de gerar aleatoriamente pontos em uma determinada situação, indica o poder de simulação destes aplicativos. King e Schattschneider (2003) indicam várias simulações que podem ser realizadas a partir da imaginação: movimentos de braços de robôs, traçado de funções trigonométricas, passeio aleatório em duas dimensões, traçado de um modelo aerodinâmico, curvas logarítmicas, pontos em uma progressão geométrica, dentre outros. As simulações permitem que curvas "se dobrem" durante a sua manipulação, objetos que enganam a nossa percepção, efeitos de bolas, reflexão de objetos, são outros exemplos.

A última característica apontada pelos autores citados remete aos micromundos, ambientes virtuais onde a Geometria euclidiana pode ser explorada e produzida a partir do uso de *softwares.* Com o *Cabri-Géomètre* e com o *Geometer's Sketchpad* podem ser criados o mundo *Poincaré,* na Geometria hiperbólica, como também podemos produzir novas ferramentas que substituam as euclidianas e permitam explorar outras geometrias. O programa *GeoSpecif* pode criar uma nova dimensão, quando comparados aos programas atuais, o que permite que o estudante tenha um leque de possibilidades de entradas nos aplicativos para exploração e descoberta de relações de dependências entre as partes e sua construção, potencializando uma aprendizagem com significado, com a ajuda de um suporte didático arrojado e inovador para os professores.

Para um melhor entendimento de muita das características discutidas anteriormente, apresentaremos, de modo breve, o *software* de Geometria dinâmica utilizado em nosso estudo: o *GeoGebra*.

2.6 O GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica criado para ser utilizado em sala de aula, sendo sua proposta inicial integrar a **Geo**metria com a Ál**Gebra** e o cálculo, de forma dinâmica. Os *softwares* educativos são, até certo ponto, projetados para interação com o estudante de modo semelhante aos materiais didáticos, quer sejam manipulativos ou não. Estes *softwares* podem ser chamados de aplicativos quando destinados a um fim específico, como é o caso do Geogebra.

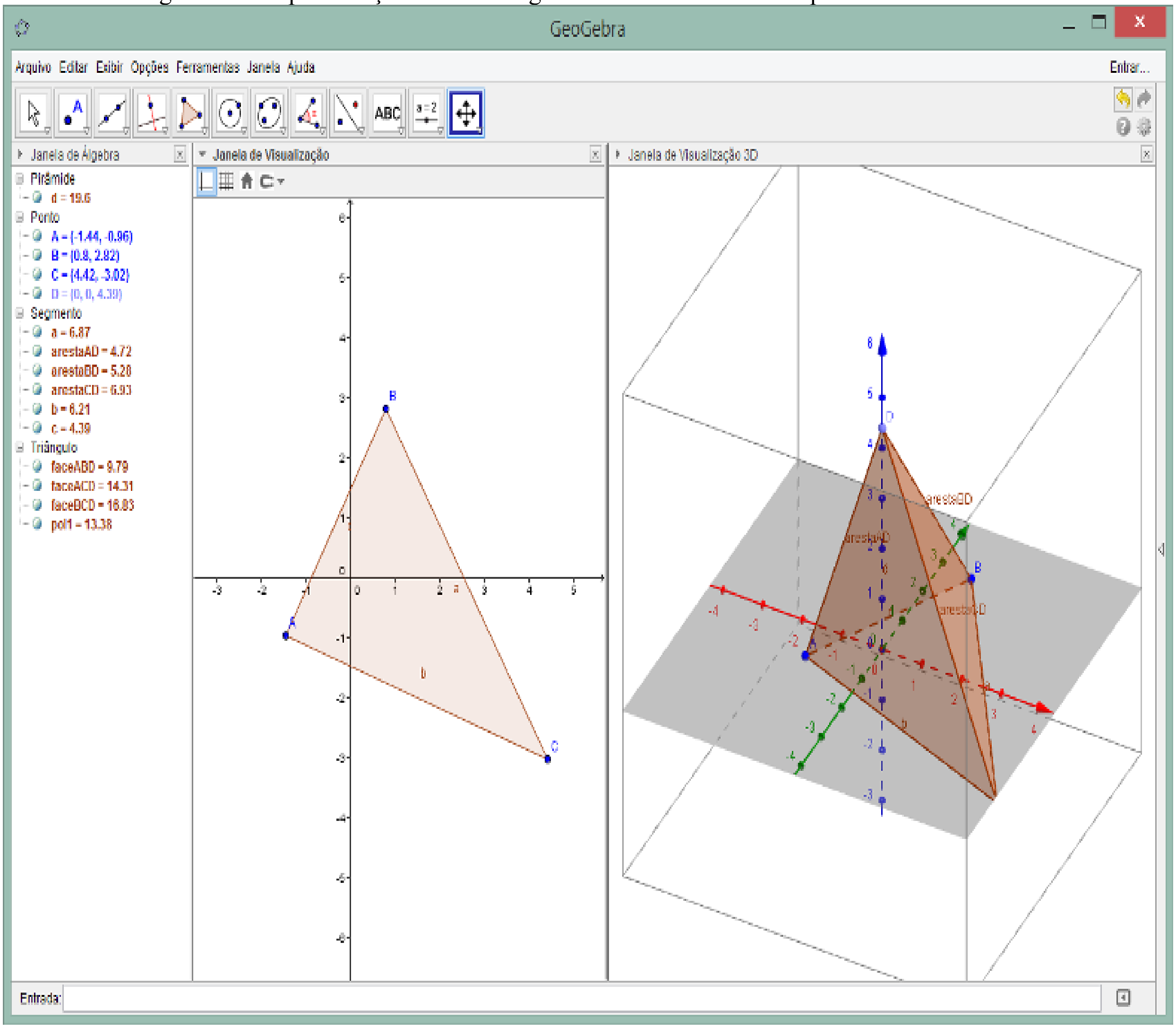
Esse aplicativo é livre, disponível em vários idiomas e de fácil instalação em diversas plataformas (Microsoft; Linux, Apple), e em diversos tipos de equipamentos eletrônicos (computadores portáteis e tablets). Possui características dinâmicas que possibilitam a experimentação e a construção de representações matemáticas, bem como estimulam a inferência de resultados.

Com ele o estudante constrói, modifica, realiza deformações nas figuras, faz rotações e reconstrói sua representação em um curto espaço de tempo, sem se ater às limitações do papel, imperfeições do desenho ou o não reconhecimento das figuras, melhorando sua visualização na resolução de problemas (VAN DE WALLE, 2009).

O manuseio do *GeoGebra* pelo estudante possibilita a apresentação de diversos conteúdos de Matemática nas áreas de Geometria, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, e Estatística. O *software* permite a construção dinâmica de diversas formas geométricas em um ambiente bidimensional (2D) e tridimensional (3D), na versão mais nova (5.0), das mais elementares (como triângulos, retângulos, quadrados, dentre outros) às mais sofisticadas, e representações gráficas de diversos tipos de funções (afim, polinomiais, lineares, exponenciais, dentre outros).

Outra vantagem do *GeoGebra* é a possibilidade de construção de atividades que podem ser salvas como arquivos, ou de figuras que poderão ser utilizadas em tarefas futuras. Seu manuseio possibilita uma construção da representação desejada, como um simples ponto (1D) mostrado na janela de álgebra; a representação plana de um triângulo (2D); e a construção de objetos tridimensionais, como a representação de uma pirâmide de base triangular (3D), possibilitando aumento gradual do nível de complexidade matemática como ilustramos na Figura 02.

Figura 02 – Representação de um triângulo escaleno utilizando o aplicativo *GeoGebra*



Fonte: construção da pesquisadora

As representações matemáticas geométricas e algébricas construídas no *GeoGebra* podem ser apresentadas, simultaneamente, na janela de álgebra, na janela gráfica e na janela tridimensional, como apresentado na Figura 02, permitindo ao estudante observar, em tempo real, os elementos geométricos agregados à sua linguagem algébrica e as transformações do objeto. Por exemplo, com auxílio de parâmetros variáveis, construímos um triângulo escaleno e podemos observar a relação entre sua representação, sua construção algébrica, e a comparação da dimensionalidade, conforme apresentado na Figura 02.

O aplicativo *GeoGebra* é muito utilizado no curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPB, desde o primeiro período letivo. Todos os comandos e regras estão acessíveis aos estudantes, bem como uma ajuda para cada função desse aplicativo. Por essa razão, propomos o uso desse aplicativo, como ferramenta que poderá potencializar a compreensão do conceito de triângulo, considerando os elementos da Teoria da Etapa Mental, proposta por Galperin (2009), como ambiente propício para a internalização de conceitos matemáticos.

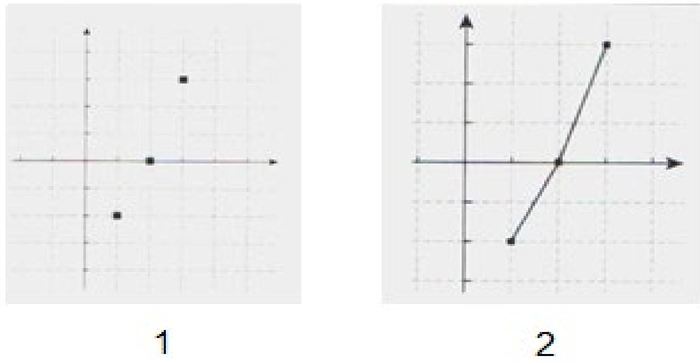
2.7 O TRIÂNGULO E SUAS REPRESENTAÇÕES NA GEOMETRIA

Segundo Duval (2008; 2011), um conceito matemático só pode ser entendido a partir de suas representações. Para isso, devemos utilizar, no mínimo, duas formas de representações de um mesmo conceito, para discuti-lo em sala de aula. O autor acredita que as operações próprias de cada registro são as operações cognitivas características do próprio ato de pensar. Estas podem ser classificadas segundo suas funções, em três categorias: produção de representações de qualquer coisa ou em referência a qualquer coisa para representá-las; objetivação; e transformação de representações por conversão e por tratamento.

O ato de pensar de forma matemática sempre mobiliza pelo menos dois registros, pois só assim o estudante pode conduzir sua compreensão para solução de problemas. As representações semióticas são transparentes quando existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam, numa visão fenomenológica. Deste modo, oferece duas condições de análise necessárias dos fenômenos para compreensão matemática: o reconhecimento das unidades de sentido e a apropriação das operações de transformação próprias de cada registro.

Assim, as operações semióticas de produção de uma representação, seja ela gráfica, por fórmulas matemáticas, por diagramas, tabelas, ou outra representação devem ser codificadas em três operações, conforme apresentada na Figura 03.

Figura 03- As operações semióticas de produção de uma representação gráfica



Fonte: Duval (2011, p. 107)

Segundo Duval (2011), no passo ilustrado no item 1 da Figura 03 são marcados pontos apenas nas interseções no plano cartesiano. Essa operação é uma transformação da regra de codificação, pois evidenciamos uma sequência de pontos em uma dimensão (1D). Ligando os pontos marcados obtemos uma cadeia de segmentos mostrada no item 2 da Figura 03. A representação passa de uma dimensão (1D) para duas dimensões (2D). No terceiro passo, evidenciado no mesmo item da Figura 03, recorremos à colocação de pontos intermediários em cada segmento que se transforma em uma nova cadeia de segmentos menores, ao mudarmos a escala trabalhada inicialmente.

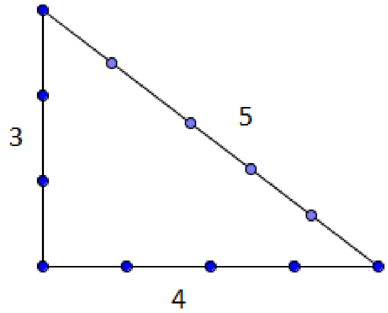
Em nossa investigação, propomos usar o estudo das transformações semióticas no auxílio da formação das etapas cognitivas das atividades, pois os estudantes só poderão resolver os problemas envolvendo o conceito de triângulos se utilizarem várias representações semióticas, conforme a propostas da Teoria da Atividade na perspectiva histórico-cultural discutida no decorrer deste estudo. Para isso utilizamos o *GeoGebra* como suporte para realização das tarefas no ambiente de aprendizagem virtual usado na UFPB Virtual.

Para a percepção das representações matemáticas, em especial a dos triângulos, faz-se necessário entendermos também sua importância nos currículos escolares, sua construção histórica e por que até hoje não utilizamos recursos atuais nos ambientes escolares, o que discutiremos a seguir.

O conteúdo relacionado a triângulos é um item que consta nas orientações curriculares oficiais, estando este presente em todos os anos do Ensino Básico, de acordo com os preceitos cognitivos indicados para cada ano de escolaridade (BRASIL, 1997; 1998; 2000; PARAIBA, 2010). Apesar de o estudo do triângulo remeter à antiguidade, ainda continua sendo de grande importância para humanidade entendê-lo. Esse conhecimento é essencial para algumas áreas como a construção civil, a engenharia, o *designer*, a arquitetura e demais áreas que necessitam trabalhar com algumas de suas características básicas tais como a rigidez, angulação e trilateralidade.

Historicamente, os triângulos são considerados um divisor de águas para as demarcações de terra, nas construções e para a medição de ângulos. Segundo Eves (2004), os agrimensores, homens conhecidos como *esticadores de cordas,* eram responsáveis pela demarcação de terras, utilizando uma corda com nós, com a qual formavam um triângulo retângulo, cujos lados mediam três, quatro e cinco unidades, equivalentes às distâncias entre pares de nó (Figura 04). A distância entre os nós era fixa e correspondente ao comprimento de um braço humano. De acordo com Eves (2004), a precisão obtida nas medidas das pirâmides e em muitos monumentos egípcios foi atribuída ao uso de esquadros feitos de corda.

Figura 04- Corda com nós 3, 4 e 5

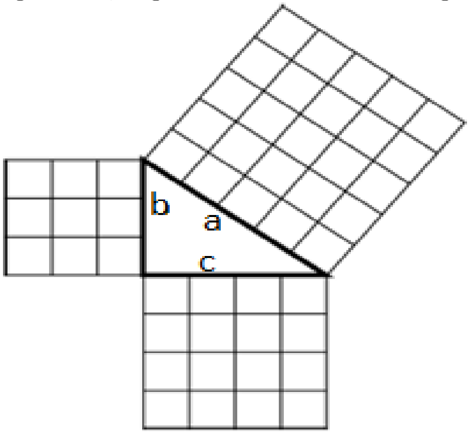


Fonte: Construção da pesquisadora

Há evidências históricas de que os chineses conheciam a representação do triângulo, muito antes dos Egípcios, assim como os babilônios já faziam uso da relação conhecida como Teorema de Pitágoras, por ter sido Pitágoras de Samos (570 a.C. – 495 a.C) quem primeiro demonstrou formalmente que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos, por volta do século V a.C (EVES, 2004; PICHOVER, 2011).

O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos geométricos, em especial, na trigonometria e uma das representações mais comuns desse resultado, nos livros didáticos de Matemática, é apresentada na Figura 05. Pitágoras demostrou que as áreas dos quadrados dos catetos (c e b) adicionadas, geravam a área quadrada de sua hipotenusa a.

Figura 05 – Representação gráfica do Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$



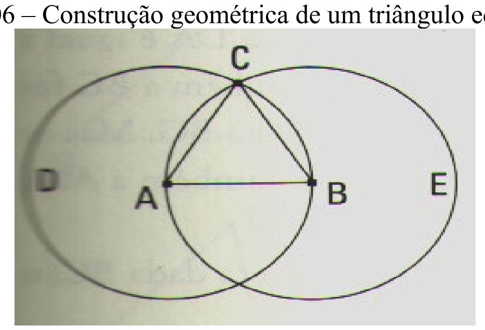
Fonte: Construção da pesquisadora

Uma das primeiras definições formais de triângulo foi apresentada no Primeiro Livro de Os Elementos, de Euclides, três séculos antes de Cristo. Nele os triângulos são definidos como figuras trilaterais, sendo caracterizadas quanto aos seus lados e seus ângulos da seguinte forma:

> 20. E, das figuras trilaterais, por um lado, triangulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
> 21. E, ainda das figuras trilaterais, por um lado, triangulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos. (EUCLIDES, 2009, p.98).

No primeiro livro de Os Elementos é proposta a construção de um triângulo equilátero sobre uma reta limitada AB dada, com base em duas circunferências de mesmo raio, centradas nos pontos A e B, sendo o ponto C um dos pontos de interseção das duas circunferências. Os segmentos AB, BC e CA constituirão os vértices do triângulo equilátero (Figura 06).

Figura 06 – Construção geométrica de um triângulo equilátero



Fonte: Os Elementos (Euclides, 2009, p. 99)

Uma definição de triângulo adotada no nível superior de ensino é a apresentada por Barbosa (2006):

> [M]uitas figuras planas são construídas usando-se segmentos. A mais simples delas é o triangulo que é formado por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos, lados do triângulo. (BARBOSA, 2006, p. 3).

Segundo documentos oficiais vigentes (BRASIL, 1998; BRASIL, 2000; PARAIBA, 2010), o estudo de triângulos deve ser desenvolvido em vários graus de complexidade, durante a Educação Básica, para que os estudantes sejam capazes de resolver situações das mais simples às mais complexas, ao final desse período de formação. Esse conteúdo é considerado um dos mais elementares do bloco Espaço e Forma.

Atualmente, o estudo de triângulos está distribuído em diversos livros didáticos do Ensino Básico. Para identificar essa distribuição, realizamos o estudo em vários livros didáticos e exames avaliativos onde elegemos a coleção de Matemática, volumes do 6º ao 9º Anos do Ensino Fundamental, *Para Viver Juntos: matemática* (OLIVEIRA, FUGITA, FERNANDES, 2011), adotada em nosso município, bem como elaboramos objetos de aprendizagem no GeoGebra e em exames de larga escala como as Olimpíadas de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio (BRASIL, 2007; 2011).

Também realizamos um estudo nos documentos nacionais em busca de orientações para a apresentação desse conteúdo, tomando como base os Descritores de Matemática para o Ensino Básico. Estes descritores são definidos pelo MEC (BRASIL, 2003), como sendo as habilidades e competências que devem ter sido adquiridas ao fim de cada segmento da escolarização básica pelo estudante.

Esses indicadores constituem, em geral, a base para as avaliações de larga escala que ocorrem no Brasil, realizadas periodicamente, como a Prova Brasil da Avaliação Nacional da Alfabetização - ANA (3º ano do Ensino Fundamental); a Prova Brasil (5º, 9º anos do Ensino Fundamental); e o ENEM (3º ano do Ensino Médio). Cada um desses processos abrange seu respectivo grau de escolaridade. Os descritores de Matemática acompanham todo o Ensino Básico: Ensino Fundamental (5º e 9º anos) e o Ensino Médio (3º ano), e estão divididos em quatro áreas: Espaço e Forma; Grandezas e medidas; Números e Operações e Tratamento da Informação. Em nosso estudo nos dedicamos à discussão de elementos da área Espaço e Forma.

Assim, segundo os Descritores da Matemática para o Ensino Básico (BRASIL, 2003), ao final do primeiro segmento do Ensino Fundamental (5º ano) o estudante deve ser capaz de:

D11 – Resolver problemas envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas;

D12 – Resolver problemas envolvendo o cálculo ou a estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.

Já ao final do segundo segmento do Ensino Fundamental (9º ano) o estudante é convidado a pensar e a compreender o conteúdo de polígonos/triângulos de forma mais complexa que a anterior. Agora o estudante deve ser capaz de:

D3 – Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos;

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas;

D8 – Resolver problemas utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares);

D10 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos;

D12 – Resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro de figuras planas;

D13 – Resolver problema envolvendo cálculo de área de figuras planas.

No Ensino Médio, ainda segundo esses documentos (BRASIL, 2003), o conteúdo de triângulos assume uma complexidade maior e uma especificidade de estudo, sendo indicado que o aluno seja capaz de:

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente);

D30 – Identificar funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

Como podemos observar, o conteúdo de triângulos tanto é tratado por meio de referência direta, no documento, o mesmo ocorrendo nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, quanto de forma indireta, ao tratar de elementos gerais do estudo de polígonos, como o cálculo de perímetro e área, uma vez que o caso dos triângulos estaria incluído.

Para o trabalho com esse conteúdo, nos diferentes níveis de complexidade demandados ao longo da escolaridade básica, muitas possibilidades se apresentam para o trabalho do professor, sendo nossa opção metodológica, na presente pesquisa, o uso de novas tecnologias no ensino de matemática, particularmente, optamos pela utilização do *software* GeoGebra no tratamento do conteúdo que tomamos como foco.

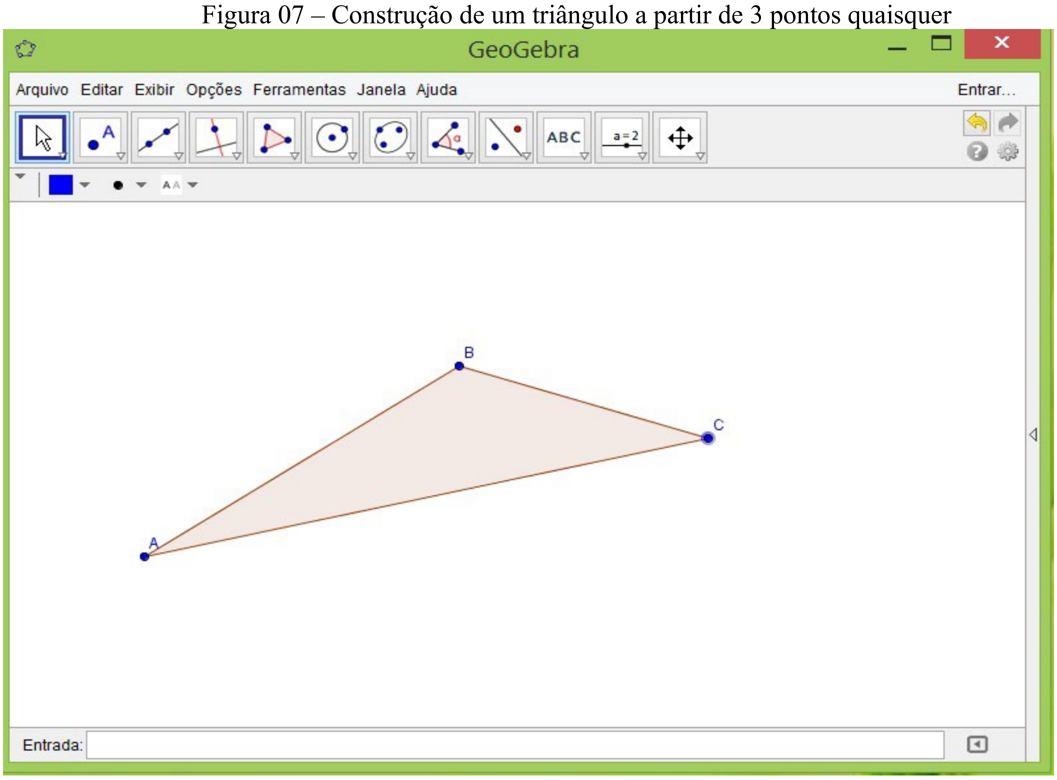
2.8 UMA POSSIBILIDADE DO USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE TRIÂNGULOS

Realizando vários experimentos com crianças em idade escolar, Ammann e González (2012), participantes do Centro de Estudos em Didáticas Especificas (CEDE), da Escola de Humanidades da Universidade Nacional de San Martin (UNSAM), desenvolveram algumas possibilidades para realização de tarefas didáticas envolvendo o conteúdo de triângulos com o auxílio do *software GeoGebra* em sala de aula, para o trabalho no Ensino Fundamental.

Como destacam as autoras, uma das principais características dos desenhos dinâmicos é a sua manipulação. A capacidade de modificarmos representações através de um conjunto de procedimentos orientados de seus componentes assegura que as propriedades geométricas desses objetos sejam preservadas, o que pode auxiliar o estudante em relação às características invariantes das figuras.

Deste modo, as propriedades geométricas podem ser traduzidas em um fenômeno visual que se produz ao arrastar objetos, de maneira que, ao arrastá-los, os elementos se convertem em um meio de reconhecimento e de verificação das propriedades através do desenho dinâmico. Com este intuito, Ammann e González (2012) propõem que sejam realizadas três tarefas em sala de aula, sendo a primeira delas, a construção, no GeoGebra, de figuras já traçadas com a ajuda de papel e lápis. Para exemplificar, consideremos a produção, com a ajuda do *software,* de um triângulo (Tarefa 1), a partir de três pontos quaisquer, não colineares (Figura 07).

Figura 07 – Construção de um triângulo a partir de 3 pontos quaisquer

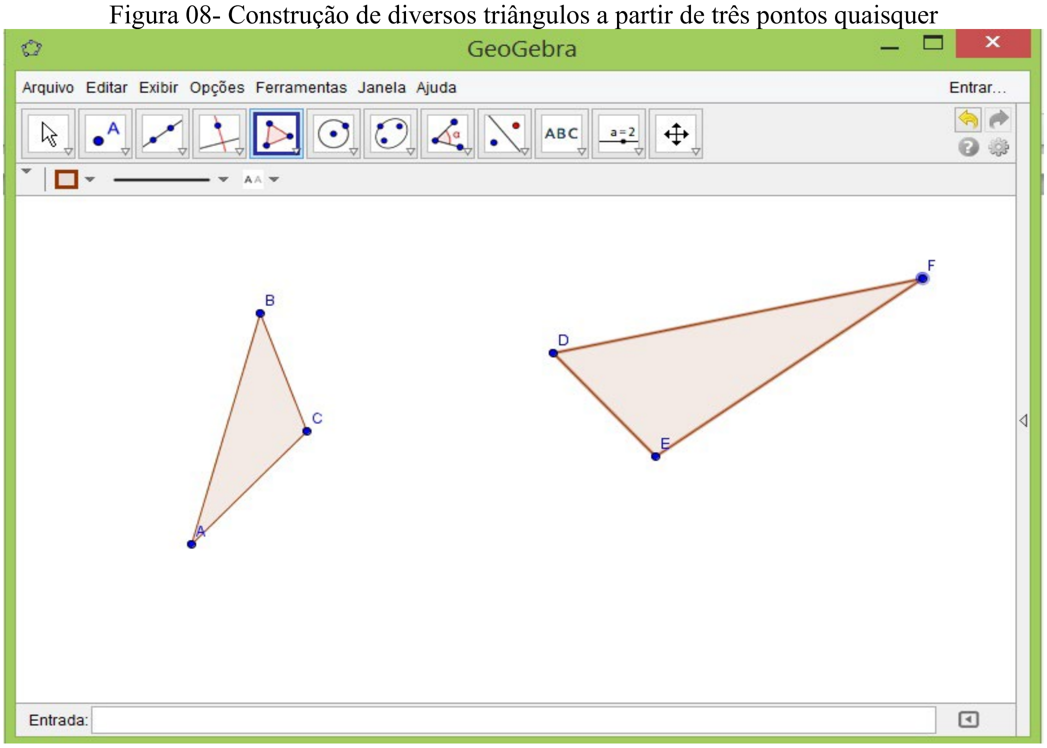


Fonte: Construção da pesquisadora

A figura 07 evidencia os três pontos indicados na tela do *GeoGebra*. É importante neste momento desativar a janela de álgebra e a matriz quadriculada com os eixos cartesianos da tela do aplicativo, para que o estudante não se confunda com o excesso de informações. Para gerar os pontos na tela utilizamos a ferramenta Ponto, repetindo esse procedimento três vezes. Para uni-los, ativamos o botão Segmento, obtendo a representação de um triângulo.

Se ativarmos o comando Mova e Arraste sobre algum destes pontos, observamos uma família de triângulos a partir do triângulo dado, sendo esta a primeira diferença entre construir com lápis e papel ou em um programa de Geometria Dinâmica, em relação ao tempo e a quantidade de figuras produzidas (Figura 08).

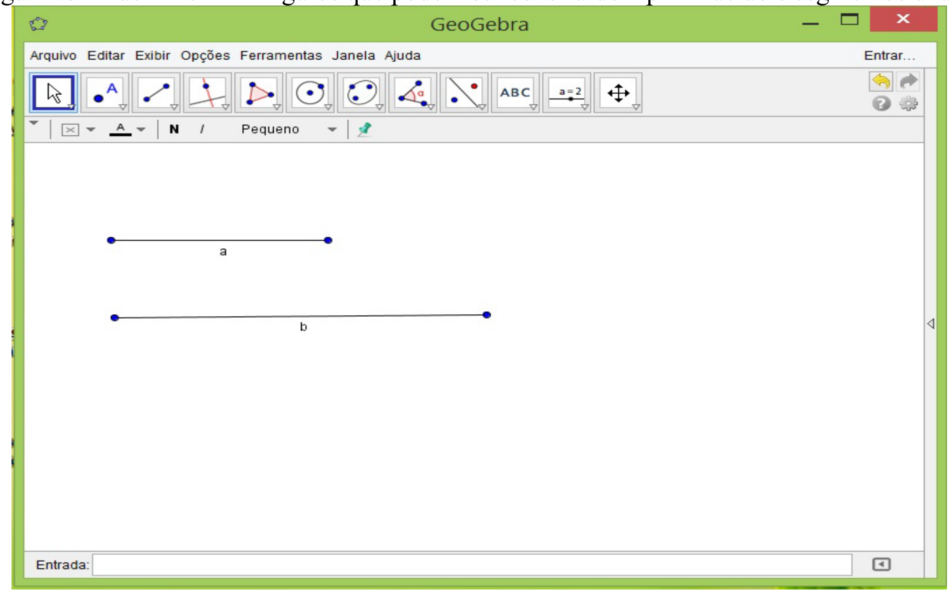
Figura 08- Construção de diversos triângulos a partir de três pontos quaisquer



Fonte: Construção da pesquisadora

O *GeoGebra* reconhece uma figura como tal, quando utilizamos a ferramenta Polígono, a qual permite não apenas movimentar a figura, mas, também, generalizar outros elementos observados. A tarefa seguinte (Tarefa 2) seria compreendida pela construção de triângulos no GeoGebra, dados dois segmentos de reta, representados por a e b (Figura 09).

Figura 09 – Identificar triângulos que podem ser construído a partir de dois segmentos dados.



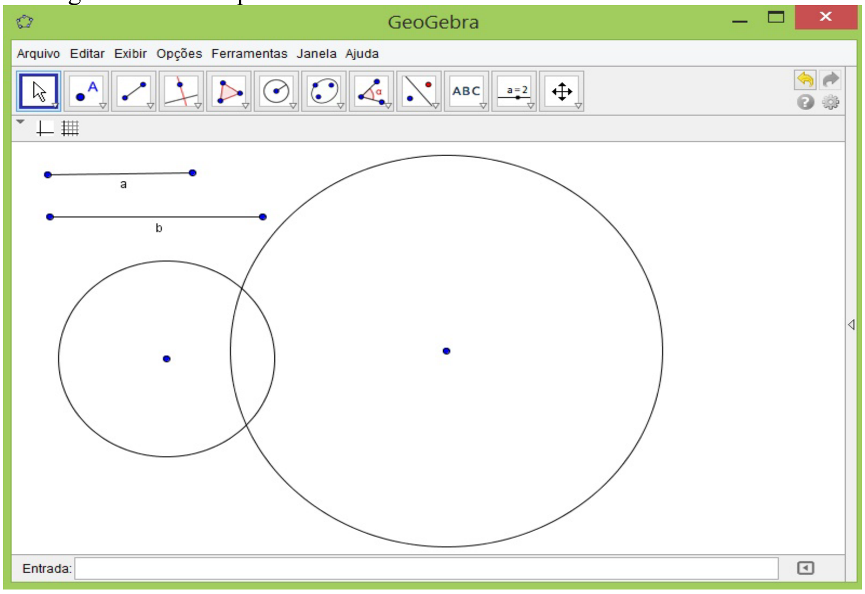
Fonte: Construção da pesquisadora

A atividade convida o aluno a construir um triângulo a partir de dois segmentos de tamanhos diferentes, sendo instigado a responder as seguintes perguntas: *Quantos triângulos podemos construir? Por quê? De que elementos dependem a formação de novos triângulos?*

Construímos os dois segmentos no *GeoGebra* apresentados na Figura 09, a partir da ferramenta Segmentos. É conveniente destacar que o *software* dinâmico define um determinado segmento neste caso a, como a distância entre dois pontos dados. Ao transladá-los sempre esta distância será *a*, independente da medida que este segmento tenha. Em seguida fazemos a identificação de cada elemento, após o que acessamos um leque de opções para escolha em um *menu*, que possibilita várias ações de interação do operador com a construção.

Em um contexto de lápis e papel, para transladar um segmento, recorremos a uma régua. O *GeoGebra* oferece várias ferramentas para realizar esta tarefa, a exemplo, da ferramenta *Circunferência,* com a qual podemos marcar o centro y dessa figura, escolher um ponto qualquer da tela, e definir o raio, selecionando outro ponto. A distância entre os dois pontos compreende o raio da circunferência. Com esta opção, estamos indicando uma grande quantidade de segmentos que têm como medida as estabelecidas para esta atividade (Figura 10).

Figura 10 – Duas possíveis circunferências construídas com o GeoGebra

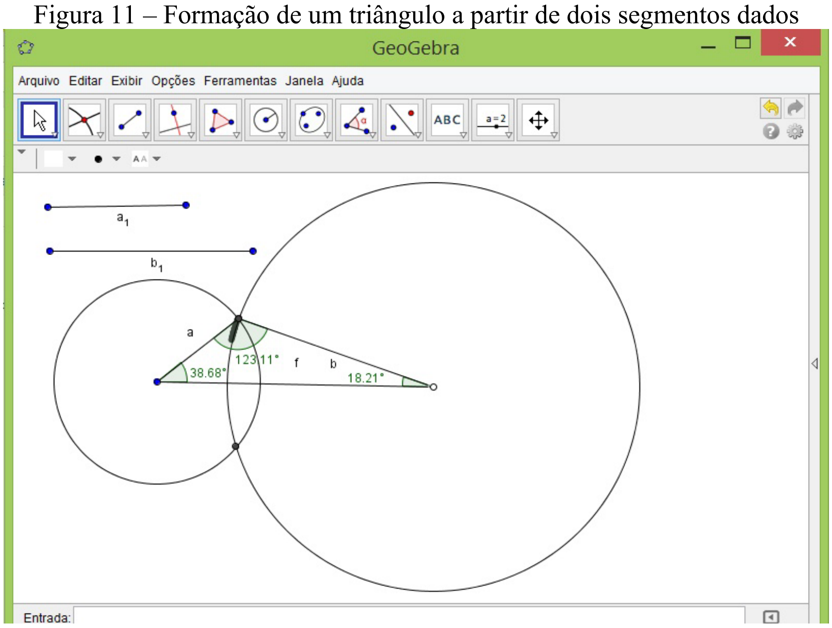


Fonte: Construção da pesquisadora

A Figura 10 indica possíveis circunferências construídas no *GeoGebra* mas, *que relação há entre o segmento que une os centros das duas circunferências e os segmentos dados como referência para a construção de um triângulo?*

Uma possível construção é a exibida na Figura 11, a partir do uso da importante ferramenta de interseção entre dois pontos, com a qual vinculamos as duas circunferências, determinando o terceiro ponto que formará o triangulo. Fixando-se um valor para cada segmento *a* e *b*, será possível movimentar o centro de uma das circunferências, permitindo-nos conjecturar sobre quais deveriam ser as medidas dos segmentos *a* e *b,* para permitir a construção apresentada na Figura 11.

Figura 11 – Formação de um triângulo a partir de dois segmentos dados



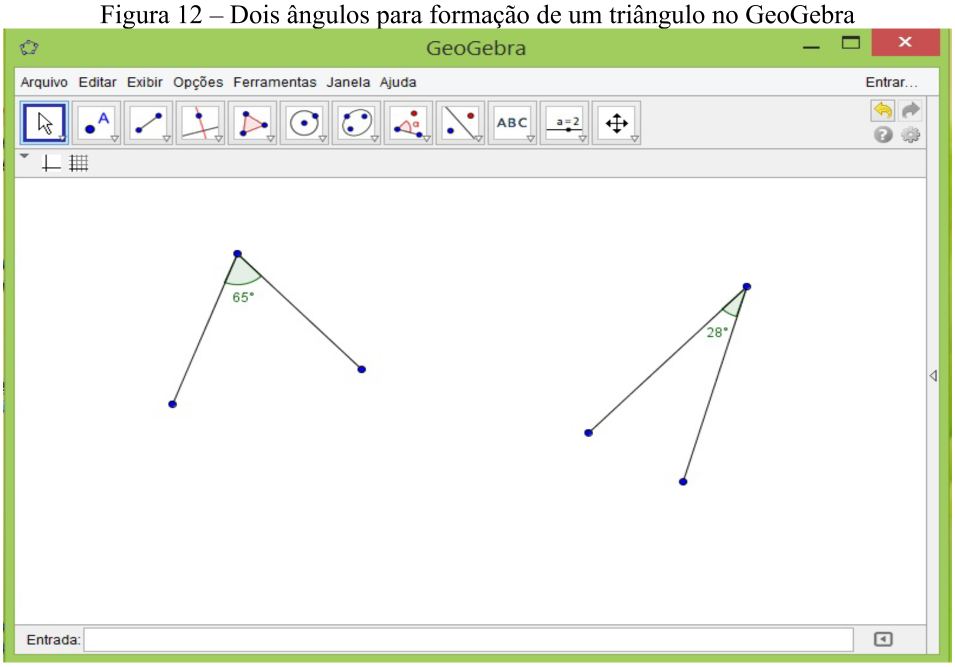
Fonte: Construção da pesquisadora

O *GeoGebra* possibilita que realizemos análises sobre a gama de possibilidades que geramos ao variar a distância entre os centros das circunferências (com dois pontos de interseção entre as circunferências; sem interseção entre as circunferências; com apenas um ponto de interseção entre as circunferências), para formar (ou não) o triângulo. As condições do trabalho geométrico, neste contexto, facilitam a exploração dos elementos e o levantamento de conjecturas acerca das propriedades da desigualdade triangular. Com relação ao uso do programa, esta conjectura pode ser possível tanto ao mover o centro de alguma das circunferências, quanto ao movimentar os extremos dos segmentos.

Supondo que os segmentos *a* e *b* tenham a mesma medida, poderíamos nos perguntar se segue sendo válido o processo de construção anteriormente realizado. Este questionamento nos permite ampla discussão sobre as relações entre medidas dos lados de triângulos ou, também, como discutir a Figura 12, a partir dos ângulos internos de um triângulo, o que constitui a terceira Tarefa.

Na Tarefa 3 a proposta é que o estudante represente dois ângulos agudos na tela do GeoGebra, como mostrado na Figura 12 (cujos ângulos medem 65º e 28º) e, em seguida, solicita-se que ele construa, se possível, triângulos que tenham como ângulos internos os traçados por ele. O estudante deve atentar para as seguintes questões*: Dados dois ângulos quaisquer, sempre é possível construir um triangulo? Por quê? É possível construir dois triângulos distintos? Por quê?* Finalizar a tarefa discutindo conjecturas dessa natureza com os estudantes.

Figura 12 – Dois ângulos para formação de um triângulo no GeoGebra



Fonte: construção da pesquisadora

Para responder essas perguntas o estudante pode usar a ferramenta *Ângulo,* com sua amplitude fixa. Isto se aplica para qualquer valor de ângulo agudo seguido do símbolo de grau. Logo, podemos completar os lados do ângulo com segmentos ou semirretas. Como iniciamos a construção? Como o problema inclui o desenho de ângulos podemos, de modo direto, construir um dos dois ângulos dados e, sobre um de seus lados, situarmos o outro ângulo, bem como podemos construir um segmento e, em seus extremos, posicionar os dois ângulos dados utilizando o *GeoGebra.*

Os vértices dos ângulos 65º e 28º da Figura 12 são identificados pelo *GeoGebra* como objetos livres, o que implica que, ao movimentá-los, é gerada a família de triângulos que mantêm invariantes os ângulos dados. Por último, em relação à questão: *dados dois ângulos quaisquer, sempre será possível construir um triângulo com dois ângulos com essas medidas? O que acontece se os ângulos dados são, por exemplo, 120º e 75º?*

Ao finalizar as tarefas, Ammann e González (2012) propõem a realização de vários questionamentos aos estudantes, tais como: *é possível construir um único triângulo com um lado e dois ângulos adjacentes ao mesmo, um obtuso e outro agudo? Quando não será possível a construção? Por quê? É possível construir um triangulo com um lado e dois ângulos obtusos? Por quê? Quantos triângulos retângulos e isósceles podemos construir tendo como dado só um lado? Explique como podemos resolver este item.* Todos estes questionamentos devem ser testados com o auxílio do *GeoGebra*, e as respostas podem constituir um relatório final, elaborado pelo estudante.

Como podemos perceber pelos exemplos apresentados, trabalhar o conhecimento geométrico a partir de um *software* dinâmico abre um grande leque de possibilidades didáticas, na medida em que suas ferramentas potencializam a geração de situações que podem se configurar como ponto de partida para a investigação, inclusive de pontos de vista distintos do originalmente proposto, ampliando a aprendizagem matemática.

A esse respeito, Van de Walle (2009) alerta aos profissionais de educação sobre o uso correto e a escolha de um *software* educativo para uso no ambiente escolar. O autor indica que o professor, antes de adquirir qualquer aplicativo, tente responder algumas questões como: *o que isso faz melhor do que poderia ser feito sem o computador? Como os estudantes serão envolvidos com o conteúdo matemático? O programa é fácil de usar? Que tipo de informações conceituais é fornecido? Que controles são fornecidos ao professor?*

Van de Walle (2009) adverte ainda, quanto à seleção de *softwares,* que evitemos o uso do instrumento apenas para os alunos estejam no computador. Além disso, lembra que o professor deve estar seguro do conteúdo matemático a ser discutido ao trabalhar com programas geradores de gráficos e com jogos. Também se faz necessário saber se o programa funciona nos computadores da escola; se existe um manual ou orientações *online* disponíveis; e se é possível realizar o arquivamento e/ou a impressão da produção dos alunos. Por fim, é necessário verificar a licença de uso do *software* nos computadores das instituições de ensino.

O autor propõe algumas diretrizes no uso de um *software* nas instituições escolares:

- Verificar a contribuição que ele oferece à disciplina, no nosso caso, especificamente para a Matemática;

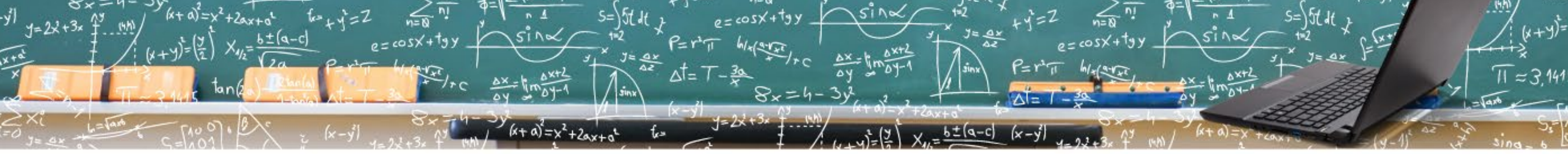
- Seu uso deve ser vantajoso para o estudante, ao proporcionar maior eficiência e rapidez na realização das tarefas;

- O professor precisa conhecê-lo bem, para planejar passo a passo suas atividades, bem como o tempo necessário para tal.

A última recomendação é que os estudantes tenham a oportunidade de manusear livremente o *software* para conhecê-lo bem e não terem problemas de comando que possam interferir no andamento das atividades propostas, podendo centrar sua atenção nos elementos relevantes do processo.

Ao trabalhar com computadores no ambiente escolar, o professor precisa garantir que seus alunos tenham a oportunidade de discutir suas ideias; que eles possam realizar conjecturas e apresentar argumentos originais. Para isso, o professor pode projetar, inicialmente, as telas do aplicativo matemático em um equipamento multimídia (como um Datashow) no intuito de apresentar suas ferramentas, bem como o seu manuseio. Em seguida, propor questões e gerir discussões em torno dos problemas e atividades a serem realizadas nas tarefas com o auxílio do computador.

Ao final devemos perceber que o objetivo de se usar *softwares* no ensino de Matemática não se limita apenas ao manuseio de determinados aplicativos, mas na relação do concreto com o abstrato para o entendimento da ação que se realiza e do conceito matemático em questão.



3 A PSICOLOGIA PEDAGÓGICA

Neste tópico abordamos as principais discussões acerca da Psicologia Pedagógica aplicada ao ensino e a aprendizagem dos sujeitos. Descreveremos sua abordagem histórico-cultural baseada em alguns estudiosos da temática, tais como: Vigotsky, Leontiev, Galperin e Talizina. O enfoque dado segue os objetivos da pesquisa no que trata dos aspectos ligados ao desenvolvimento de metodologias de ensino e aprendizagem da Matemática, na modalidade a distância.

3.1 UMA ABORGAGEM DA PSICOLOGIA PEDAGOGICA

O conhecimento social acerca do qual discorreremos neste trabalho, está baseado no enfoque histórico-cultural, baseado em L.S. Vigotsky. A ciência psicológica começa a se desenvolver tentando compreender a psique humana. Isto significa que o desenvolvimento do indivíduo, desde sua fecundação até a maturidade, está sujeito às leis sociais e não apenas às leis biológicas, como se pensava no início do século XX.

Atualmente, a psicologia pedagógica continua a desenvolver estudos a partir da abordagem histórico-cultural, integrando as ideias de seu fundador a novas contribuições de alguns de seus continuadores: A. N. Leontiev, P. Ya. Galperin e N. F. Talizina e de outros colaboradores que se dedicaram a aprofundar as discussões psicológicas e princípios educacionais. Infelizmente, os estudos soviéticos ainda são poucos difundidos nos países ocidentais, juntamente com seus principais autores, os quais não contam ainda com uma penetração mais ampla no âmbito da Psicologia ou da Educação no Brasil.

Em nosso estudo teórico discutimos a aproximação da Teoria da Atividade, considerando o desenvolvimento da teoria histórico-cultural, no que trata do ambiente escolar. Em nosso caso, em particular, focamos a discussão na possibilidade de aplicação de alguns elementos teóricos aqui considerados, no ensino do conteúdo de Triângulos, na Licenciatura, em virtude de sua importância para a formação do docente que irá atuar na Educação Básica. Iniciaremos nossa discussão com um breve panorama histórico para entendemos a aplicação dessa Teoria na atualidade.

3.2 A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL: DE VIGOTSKY À TALIZINA

Vigotsky, criador da teoria histórico-cultural da aprendizagem e do desenvolvimento, discutiu os conceitos que envolvem o pensamento e linguagem humana. Por volta da década de 1930, o autor argumentou em defesa da bilateralidade da relação entre o desenvolvimento e a aprendizagem, visto que sofrem influências mútuas. Ele atribuiu a relação social ao processo de desenvolvimento das capacidades humanas superiores, ou seja, as funções superiores originam-se sempre entre as pessoas, no âmbito social, para apenas depois serem individualizadas.

Na teoria histórico-cultural, Vygotsky defendeu que o conhecimento é construído socialmente. Desta forma, o interesse do autor voltava-se para o processo de como as pessoas realizavam algumas tarefas além do que seriam capazes, individualmente, de fazê-las. Sabe-se que o autor acreditava que as funções psicológicas superiores surgem a partir das formas coletivas superiores da atividade. Consequentemente, a atividade conjunta é um elemento indispensável para a formação da atividade individual. Partindo deste princípio, Vigotsky elegeu a Zona de Desenvolvimento Próximo (ZDP) como fator decisivo para o entendimento deste processo, definindo-a como a diferença existente entre o nível conhecimento do sujeito, determinado pela capacidade individual de resolução de problemas, de forma independente, e o nível potencial, determinado pela resolução de problemas sob a orientação de outro indivíduo, mais capacitado.

A relação entre os níveis de desenvolvimento do sujeito é complexa e obedece a uma dialética. Para Vigotsky, o ensino atinge seu propósito quando vai adiante do desenvolvimento, despertando as funções que estão em processo de maturação ou na zona de desenvolvimento próximo (SALVADOR *et al*, 2000).

O desenvolvimento de toda atividade humana deveria ser entendida a partir de uma unidade de análise, que nem sempre seria o elemento mais simples do processo. Esta unidade de análise também deve garantir a conservação de todas as particularidades da atividade, representadas por todas as suas partes, mas, ao mesmo tempo, ser uma unidade compacta para a análise psicológica. Era necessário encontrar uma forma mínima que contivesse as particularidades de toda uma classe e que explicasse como se dá a formação de conceitos no indivíduo, como resultado de uma atividade concreta humana, contendo as características essenciais do objeto. Coube aos continuadores de Vigotsky demonstrar como esse processo ocorre no sujeito.

Investigações posteriores, baseadas nos estudos da teoria histórico-cultural realizadas por Alexei Nikolaevich Leontiev, continuaram o trabalho com a ideia de "atividade", central na teoria proposta por Vygotsky. Segundo este autor, o processo de formação de conceitos científicos específicos inicia-se ao realizarmos uma atividade. Ele afirma que não são os conceitos, mas a atividade real do homem que une o sujeito à realidade. A partir deste princípio é determinado o desenvolvimento da consciência humana.

Dessa forma, a Teoria da Atividade é compreendida como um processo específico que relaciona o sujeito com a realidade, sendo o mais importante dos processos de comunicação por ser desencadeado na atividade prática. (TALIZINA; SOLOVIERA; ROJAS, 2010).

Segundo Núñez (2009), a Teoria da Atividade é composta por uma estrutura que permite pensar em:

> [...] qualquer conceito, como imagem de objetos e fenômenos, deve estar relacionados com um tipo específico de atividade. Portanto, a formação do conceito não é só a formação da imagem especial como quadro da realidade. É também um processo de formação de um sistema operacional que tem uma estrutura interna (NÚÑEZ, 2009, p. 58).

Mas o que é uma atividade? Existem várias propostas de definição deste conceito. Discutiremos aqui algumas definições apresentadas por Talizina, Soloviera e Rojas (2010) que elencam as principais características desse conceito, baseados nos seguidores de Vigotsky (NUÑEZ, 2009). Leontiev descreveu a atividade como sendo um processo específico que ocorre em uma relação ativa do sujeito com a realidade. Em outro momento, este mesmo autor sugere que a atividade pode ser compreendida como uma unidade molar da vida do sujeito, formada por um sistema que tem sua própria estrutura definida (TALIZINA, 2000).

Talizina (2000) apresentou considerações trazidas por outra discussão ao definir a atividade como forma específica do ser social do homem, cujo fim é uma transformação ativa da realidade. Ao observar que a atividade é a condição e a manifestação de toda a vida psíquica do ser humano. A autora defende que a atividade é qualquer processo realizado por um indivíduo, de maneira sistemática, que conduz a um determinado resultado. Também podemos entendê-la como um processo realizado pelo indivíduo, cometido por um motivo, como o jogo ou a aprendizagem, desprovido dos reflexos.

Para Galperin (2009) a condição fundamental que caracteriza qualquer atividade é a presença de um problema, ou seja, a atividade seria formada por um sistema de ações que conduzem à solução de um problema. Segundo Núñez (2009), existem vários tipos de atividade: prática; do conhecimento; da formação de valores; e da comunicação. Estes tipos de atividade devem ser desenvolvidos com estudantes no ambiente escolar para formar o indivíduo por completo.

Leontiev (1991) define a atividade como o principal objeto psicológico que possibilita a relação direta do sujeito com o mundo, estabelecendo-a como ponto determinado de partida e como principal método de elaboração do conhecimento científico. O autor aponta o objetivo e o motivo como as principais categorias de análise de sua teoria, estabelecendo uma relação ativa entre o sujeito e o objeto, sendo a atividade materializada por meio de uma ação, operações e tarefas, motivadas pela necessidade, sendo este último (necessidade) o principal fator que desencadeia a atividade. A ação é concebida por este autor como sendo um conjunto de operações integradas a um determinado sistema lógico, que necessita das operações correspondentes para a execução de uma atividade e o desenvolvimento de habilidades no sujeito.

Entende-se por habilidade, segundo Núñez e Ramalho (2009, p. 3), um conceito aberto e amplo que é utilizado em diversos textos oficiais, com divergentes sentidos. Os autores a definem como "[...] um tipo de atividade cognoscitiva, prática e valorativa, ou seja, que coloca o conhecimento em ação. Os conhecimentos teóricos sempre existem relacionados com uma ou outra ação (habilidades)".

Assim, o processo de formação de uma habilidade foi considerado por Galperin (2009), como sendo composto por três fases essenciais em qualquer atividade humana: a orientação, a execução e o controle, em uma estrutura invariante. A invariante é entendida aqui como sendo um sistema de elementos constantes, que constitui a base para qualquer conceito. O autor considera ainda que a estruturada invariante deve ser formada por: um objeto; os motivos; o objetivo; o sistema de operações; a base orientadora da ação; os meios para realização da ação; as condições de realização e, por fim, o produto. (GALPERIN, 2009). Todos estes itens serão discutidos e ampliados, posteriormente, em nosso trabalho.

Leontienv, ao continuar os estudos de Vigotsky, estruturou a Teoria da Atividade por meio do conceito de atividade, considerando-a como a unidade formada pela composição psíquica e pela atividade externa. Defende em sua tese, como princípio metodológico central, que a atividade psíquica interna representa uma atividade externa e material internalizada, demonstrando posteriormente que, o material, o social da atividade e o reflexo psíquico, constituem a unidade de análise evidenciada nos estudos de Vigotsky.

Leontiev (1991) estabeleceu um planejamento de estratégias, organizadas e sistematizadas, para desenvolver uma análise complexa do conteúdo da atividade da aprendizagem escolar. Coube aos seus continuadores identificar como ocorre o processo de internalização da atividade externa em processos mentais. Esta questão foi explicada por P. Ya. Galperin e seus colaboradores, em estudos posteriores.

Galperin, de forma dialética, deu continuidade aos estudos iniciados por Vigotsky e Leontiev, ao descrever o mecanismo de interiorização das ações externas em internas, desenvolvendo a Teoria de Formação das Ações Mentais e dos Conceitos da Atividade. Este método revelou as etapas do processo de transformação de uma atividade externa em interna, no sujeito.

Galperin (2009) defendeu que é possível formar processos mentais pela via da atividade planejada, determinando os tipos específicos de atividades psíquicas necessárias à internalização das ações mentais. Para ele, as ações mentais e os conceitos são um reflexo, derivado das ações materiais externas que são assimiladas pelo indivíduo, em quatro etapas fundamentais: a formação da base orientadora da nova ação que deseja ser formada; a formação do aspecto material da ação; a formação do aspecto linguístico da ação; e, por fim, a formação desta habilidade como um ato mental.

O processo de formação da habilidade, de acordo com Galperin (2009), caracteriza-se por prezar pela qualidade das ações que serão internalizadas no processo da assimilação dos conceitos. Por assimilação, o autor entende o processo de apropriação do objeto do conhecimento ao ser submetido às etapas de transformações sucessivas, que garantiriam a qualidade do processo. O autor considera que o conjunto destas etapas promoverá a qualidade da internalização da ação, envolvendo os seguintes indicadores: a forma da ação; o grau de generalização; o grau de detalhamento; o grau de independência; o grau de consciência e o grau de solidez.

Os estudos de Galperin foram decisivos para o desenvolvimento da Psicologia Pedagógica. Ao propor a sua teoria, o autor colocou em pauta as discussões sobre os sistemas de ensino, currículo escolar, formação de professores e o que realmente significa aprender, em âmbito escolar.

Galperin, segundo Resende e Vadez (2006), criticou os modelos de ensino adotados pelas instituições escolares e apresentou uma alternativa didático-metodológica de ensino, ao priorizar a aprendizagem por meio da prática sistematizada, diante de situações problemas. Ao final, o autor elegeu um método global dirigido à compreensão do estudante, a partir da identificação de elementos que favorecem a aprendizagem e o desenvolvimento do sujeito, dedicando trinta anos de estudos.

Coube aos continuadores de Galperin, o estabelecimento de propostas didáticas que possibilitem o desenvolvimento da criatividade do discente e o aperfeiçoamento das discussões de tarefas que estimulem a motivação dos educandos. Todos estes itens foram discutidos nos estudos de Nina F. Talizina e colaboradores.

Nina F. Talizina, também continuadora e colaboradora da teoria histórico-cultural de Vigotsky, de Leontiev e de Galperin, junto com outros pesquisadores, desenvolveu princípios didáticos para aplicação da Teoria da Atividade em instituições escolares ao defender o princípio da *Teoria da Aproximação da Atividade* (TAA) como sendo a continuação dos estudos de Vigotsky para a unidade de análises, constituindo-se como uma sequência do paradigma histórico-cultural.

Esse princípio baseia-se nos pressupostos básicos defendidos por Vigotsky de que cada atividade pode se dividir em ações, como processos menores e mais simples, para análise e estudos concretos. A ação compreende um processo que se reflete na consciência do sujeito e se dirige a um objetivo concreto e tem como característica essencial o fato de poder sempre ser determinada pela presença do objetivo consciente. Desse modo, o objetivo sempre se reflete na consciência do sujeito, no qual não necessariamente sucede com o motivo de toda a atividade. Logo, quando uma ação é aprendida, automatiza-se, convertendo-se em uma operação automatizada, já sendo internalizada no sujeito.

A Teoria da Aproximação da Atividade, no âmbito da aprendizagem, segundo Talizina (2000), está baseada em três princípios fundamentais: *a aproximação da atividade para a psique; a ação como unidade de análise de aprendizagem; e a natureza social do desenvolvimento psíquico do homem.* Todos estes itens, como o aprofundamento da Assimilação Dirigida da atividade proposta por Talizina (2000), estão descritas em suas principais obras: *Manual de Psicologia Pedagógica*; *La Formación de las habilidades Del pensamiento matemático* e o desenvolvimento de todo arcabouço teórico apresentado na obra *La aproximación de la actividade em psicologia y su relación com El enfoque histórico-cultural de L. S. Vigotsky,* e serão alvos de nossas discussões.

3.3 A TEORIA DA ASSIMILAÇÃO DIRIGIDA

A Teoria da Assimilação Dirigida (TAD) ou Teoria da Aproximação da Atividade (TAA), proposta por Nina F. Talizina e seus colaboradores, está baseada em estudos anteriores, de L.S. Vigotsky, A. N. Leontiev e P. Ya. Galperin. Talizina (2000; 2001; 2010) avança nas discussões da Teoria Histórico-Cultural ao instrumentalizar as ideias da Teoria da Atividade e desenvolver um sistema de propostas aplicadas ao ensino, inserindo a discussão da necessidade de se trabalhar com conceitos lógicos aos conteúdos didáticos, da inserção de problemas que desenvolvam a criatividade do estudante e na discussão do ensino escolar, levando em consideração os conceitos psicológicos como: atenção, uso da memória, entre outros (TALIZINA, 2000).

A autora, juntamente com colaboradores, também desenvolveu uma discussão pautada em conteúdos matemáticos, nas áreas de Aritmética e de Geometria, como verificamos na obra intitulada *La formación de las habilidades del pensamiento matemático,* traduzida para a língua espanhola em 2001, direcionada aos anos iniciais de escolaridade.

A assimilação de conceitos, para Talizina (2000), é um processo de assimilação das ações, enquanto que os conceitos se formam como produtos deste processo. A relação entre conceitos e sua assimilação são inseparáveis do ponto de vista das ações, que servem como meio para sua formação. Segundo ela, a assimilação de conceitos é o processo que indica a passagem da experiência social para a experiência individual.

O grande desafio para Talizina (2010) era fazer com que, a partir da identificação das ações que se encontram na base dos conceitos, estes se convertessem no objeto de assimilação pelos alunos, sendo esse processo de formação controlado sistematicamente. O professor, nesse caso, obtém o acesso à atividade cognitiva dos alunos que conduz a formação dos conceitos.

Os estudos de Vigotsky e de seus colaboradores mostraram que as crianças, até a idade adolescente, não têm um pensamento conceitual. Antes desta idade, a criança utiliza diferentes formações intelectuais que, funcionalmente, substituem os conceitos. O ensino realizado sobre as bases da Teoria da Atividade mostrou que a criança, já nos primeiros anos de escolaridade é capaz de assimilar conceitos abstratos e generalizados, em condições de ensino coletivo (TALIZINA, 2000).

Desse modo, podendo atuar de maneira razoável, a partir de conceito assimilado, se é orientado corretamente no sistema de numeração, por exemplo. Mas ainda não tem as características deste conceito, a nível consciente, não podendo utilizá-lo em sua atividade de maneira voluntária. O trabalho posterior com os conceitos requer a introdução de ações novas, tanto lógicas, como especificas, que visam à identificação das consequências da correspondência do objeto com a classe dada, a comparação de conceitos, dentre outros. Talizina, Soloviera e Rojas (2010), baseiam-se em três princípios básicos: a inseparabilidade da relação da psique e a atividade; a estrutura sistêmica da atividade; e a origem histórico-cultural da psique e da atividade humana.

O primeiro princípio do estudo está fundamentado nos trabalhos de Rubinstein (2000), que considera a atividade e a psique humana inseparáveis. Talizina, Soloviera e Rojas (2010), acreditam que a psique humana se forma e se manifesta só diante da atividade. Colaborando com este pensamento, os autores consideram também o argumento de Leontiev ao mostrar em seus estudos que a psique se desenvolve como resposta às necessidades da vida real em todas as instâncias de sua natureza. Em estudos posteriores evidenciou-se que a psique desempenha um papel de orientação ou de sinalização da atividade.

O segundo princípio defendido foi à presença de uma estrutura sistêmica da atividade, concebida por Talizina, Soloviera e Rojas (2010), que é formada por uma unidade composta por diversas partes que se interrelacionam, formando um todo. Este conjunto complexo, ao interagir, permite a resolução do problema. Como partes do processo, Talizina (2000; 2010) identifica: o motivo, o objetivo, a base orientadora, os meios de execução e os resultados.

Cada uma dessas partes deve ser analisada considerando-se o conteúdo disciplinar e suas relações, ou seja: a interação do motivo com o objeto da atividade; a orientação da base orientadora da ação (BOA) com os meios para execução; o objetivo com relação ao seu resultado; e, por fim, o resultado interagindo com o objetivo estabelecido (TALIZINA, SOLOVIERA; ROJAS, 2010).

Talizina (2001; 2010) afirma que durante a realização da atividade são desencadeadas as etapas que compõem o processo, cujas partes funcionais são compostas por: direção ou orientação; execução; controle; e correção. Cada unidade de análise deve garantir a conservação de todas as particularidades da atividade, bem como todas as suas partes funcionais e relações. Todas essas partes ocorrem na ação e na atividade.

A relação que existe entre o primeiro e o segundo princípios da TAA, considera, por sua vez, a relação existente entre a psique e a atividade. Elas são diferentes uma da outra. A psique constitui-se no plano primário e surge durante o desenvolvimento do indivíduo, desde sua concepção até a maturidade e reprodução (ontogênese), enquanto a atividade é um processo secundário, surgindo mais tarde no indivíduo como uma modificação da psique. Ambos os planos, primário e secundário, coexistem ao longo da vida humana.

Essa afirmação feita por Talizina, Soloviera e Rojas (2010), está baseada nos trabalhos de Vigotsky (2007) acerca da interiorização dos processos psicológicos, os quais aparecem na cena duas vezes: primeiro como processos externos, sociais, compartilhados, e depois, como processos independentes, internos, individuais.

Por último, Talizina, Soloviera e Rojas (2010) evidenciam o terceiro princípio da TAA baseado em Vigotsky (2007), onde consideram que a origem da teoria histórico-cultural baseia-se na psique humana e se fundamenta na origem da atividade, sendo respeitado também na Teoria da Aproximação da Atividade. Talizina afirma que muitos estudos foram feitos com base nos estudos de Vigotsky pelo mundo, mas os pesquisadores usam de forma incompleta sua teoria, pois esquecem os dois princípios iniciais da Teoria da Assimilação Orientada: a relação inseparável da psique e da atividade; e o caráter sistêmico da atividade.

Ao longo dos estudos se abrem novos rumos para discussões acerca do desenvolvimento humano e da educação. Sua aplicação foi iniciada por Vygotsky e seguem, discutindo o aprimoramento da atividade humana, na busca do desenvolvimento potencial na psicologia e na educação.

3.4 PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO BASEADA NA PSICOLOGIA PEDAGOGICA

Existem diversas formas de ensino, que podem ser aplicadas a diferentes modalidades de educação, como é o caso do ensino semipresencial, nosso foco de estudo. O processo de ensinar se baseia na atividade do professor no exercício da profissão (ensino) e na aprendizagem do aluno. Desta forma, quando o processo é exitoso, o professor ensina (algo) e o aluno aprende (algo).

A relação entre professor e aluno é secular e nela percebemos, na atualidade, a necessidade de colaboração entre ambos e não uma relação unidirecional. O êxito dos estudantes requer a colaboração não só do professor, mas também dos outros alunos, isto é, de seus pares. Contudo, o papel do professor é fundamental e se assenta na apresentação do conhecimento social ao estudante, através de modelos que lhes possibilitem elaborá-los. Com a ajuda do professor, os alunos poderão descobrir a essência dos conceitos que constroem.

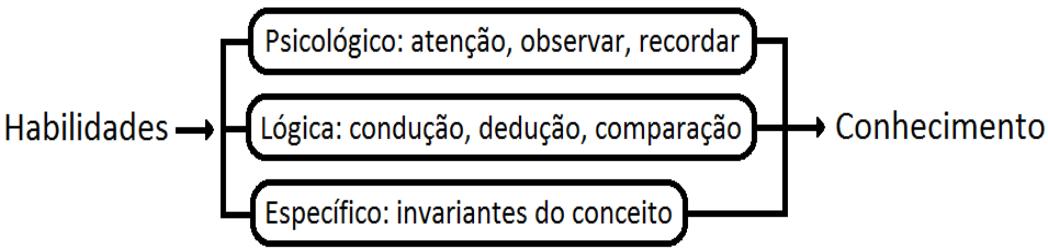
Assim, a aprendizagem não depende da parte superficial apresentada pelo objeto de conhecimento, mas da efetiva relação entre os sujeitos e esse objeto (TALIZINA, 2000). Baseados nesse princípio, concebemos que o sucesso de qualquer proposta de ensino está diretamente ligado a três fatores básicos: o objetivo do ensino (para que ensinamos?); os conteúdos de ensino (o que ensinamos?); e o processo de aprendizagem (quais os métodos adotados para ensinar? como ensinar?).

O objetivo é a primeira etapa que o professor e os sistemas de ensino devem atentar ao almejar a aprendizagem do estudante. Com base na Teoria da Aproximação da Atividade, proposta por Talizina, Soloviera e Rojas (2010), os objetivos devem ser representados em forma de sistema de tarefas e os problemas propostos ao estudante devem ser estruturados para que este adquira os conhecimentos para solucioná-los. Os autores indicam que, nessa fase, devemos utilizar situações problemas para a construção dos objetivos, uma vez que, adotando tal procedimento, o professor permite que o aluno atente para o reconhecimento do objeto, ao possibilitar a identificação clara de conhecimentos e hábitos necessários para realização da tarefa.

O segundo ponto refere-se ao conteúdo de ensino escolar, que deve ser planejado com clareza quanto aos objetivos. Este deve ser selecionado de modo a identificar os conhecimentos e habilidades que são necessários para solucionar os problemas a ele relacionados. Ao resolver os problemas que envolvem diretamente os conteúdos escolares, o estudante trabalha com o reconhecimento de objetos que permitirão o desenvolvimento da habilidade de estabelecer hipóteses, relacioná-las com a classe do objeto e de verificá-las.

Segundo a Teoria da Aproximação da Atividade (TAA), faz-se também necessário que o estudante, neste momento, adquira três tipos de conhecimentos (psicológico, lógico e específico) e os desenvolva em forma de habilidades (Diagrama 01).

Diagrama 01 – Habilidades necessárias para formação do conhecimento segundo Talizina (2000).



Fonte: Construção da pesquisadora

A habilidade psicológica diz respeito à atitude que o indivíduo deve ter no ambiente escolar. Sabemos que os estudantes são diferentes e que estas diferenças influenciam diretamente em necessidades diferentes de trabalho. As diferenças individuais se relacionam também na esfera cognitiva, pois alguns alunos têm memória visual mais privilegiada, enquanto outros, por exemplo, usam mais a memória auditiva. Alguns possuem um pensamento dirigido a imagens concretas, outros ao pensamento lógico-abstrato.

Para alguns alunos, portanto, a aprendizagem é facilitada se o material apresenta ajuda visual; outros requerem a presença concreta do material com a ajuda visual e outros dependem mais da representação esquematizada, na linguagem formal. A falta de atenção, observação, o uso correto da memória, dentre outras, são habilidades que precisamos desenvolver nos estudantes durante o período de escolaridade, caso contrário, iremos promover o surgimento de diferentes tipos de dificuldades, tornando-se mais complexo atingir os objetivos estabelecidos (GALPERIN, 2009).

A habilidade lógica, por sua vez, diz respeito à regra lógica que segue da condição ao conceito. Já a habilidade específica diz respeito ao sistema concreto de características e aos métodos para sua identificação, que são diferentes em cada área. Habilidades dessa ordem devem ser desenvolvidas desde os primeiros anos de escolaridade, sendo os principais hábitos lógicos necessários no período de escolaridade: a condução para o conceito; a dedução das consequências e a comparação, todos eles indispensáveis para o estudo da Matemática (TALIZINA, 2000).

O primeiro hábito lógico trata-se da *condução para o conceito*. Na escola, geralmente não se ensina ao estudante a estrutura lógica das definições, sendo elas simplesmente impostas aos alunos para memorização, acumulando-se uma grande quantidade de diferentes tipos de definições, principalmente quando tratamos da disciplina de Matemática. Quando o estudante esquece alguma definição, então não tem como restabelecê-la através do raciocínio lógico-dedutivo, pois não apreendeu sua estrutura, nem domina as regras de sua construção. Sem a análise da lógica do conhecimento, os estudantes serão incapazes de realizar a condução para o conceito, cometendo erros, tanto de ampliação, como de redução do volume dos conceitos que serão importantes no decorrer da aprendizagem.

O segundo hábito lógico que deve ser desenvolvido durante o processo de aprendizagem refere-se à *dedução das consequências*. A identificação de consequências lógicas dos conteúdos segue a exigência de lei da contraposição, ou seja, a mesma consequência pode ser relacionada a causas diferentes e, por isso, não se pode passar da presença de consequências à afirmação da presença da causa, tão necessário para formar o pensamento completo e válido do homem. Um exemplo seria o reconhecimento de objetos relacionados a um problema envolvendo a estrutura disjuntiva de características que, em geral, produz muita dificuldade nos estudantes.

O terceiro hábito lógico necessário ao desenvolvimento dos conteúdos escolares diz respeito à *comparação dos conceitos* e exige-se que o estudante conheça a estrutura indeterminada de condições dos conteúdos. A dificuldade deste hábito lógico se relaciona com o reconhecimento de objetos em problemas com uma estrutura indeterminada de condições, isto é, quando a resposta não é verdadeira nem falsa, mas sim, indeterminada. O objeto pode ou não se relacionar com a classe, devido a não identificarmos as informações e condições necessárias acerca das características do objeto (TALIZINA, 2000).

Talizina (2000) afirma que, infelizmente, os hábitos lógicos que conduzem à formação da habilidade lógica na aprendizagem não são ensinados nas escolas, trazendo muitos prejuízos aos estudantes, principalmente quando estes atingem os graus superiores de ensino, por não compreenderem as regras lógicas dos conteúdos necessárias para o desenvolvimento e resolução de problemas.

A autora afirma ainda que a maioria dos programas curriculares das escolas não indicam, de forma específica, atividades que desenvolvam os meios lógicos de pensamento disciplinar. Como resultado, o pensamento lógico do estudante não é desenvolvido, e quando isso ocorre é feito de forma espontânea, sem o conhecimento do sistema dos meios necessários, de seu conteúdo e da sequência de sua formação. Esta conduta leva a muitas dificuldades posteriores, em nível superior de ensino.

Assim, o estudante se apoia apenas no sistema de características ensinadas que leva a definição dos conceitos nas características irrelevantes e isoladas do objeto a ser aprendido. Eles apenas memorizaram a definição dos conceitos, mas não aprenderam a trabalhar com eles. Podemos iniciar a formação dos meios do pensamento lógico por esta via ao analisar o sistema de características da classe do objeto.

Talizina (2000) afirma que, neste momento, os alunos têm que conhecer as características necessárias e suficientes do objeto. Os conceitos se sustentam em suas características essenciais, sendo o professor responsável por mediar à diferenciação das características essenciais e irrelevantes dos objetos, ajudando a desenvolver esta habilidade nos discentes.

A análise dos conhecimentos acumulados, em diferentes áreas do conhecimento, aponta que seu acumulo se dá, normalmente, através de incrementos dos fenômenos e das novas dependências particulares, enquanto que a base segue sendo a mesma. Devido a isto, durante a construção de qualquer conceito é importante identificar a sua base de formação no sujeito.

A habilidade específica está diretamente ligada à identificação da base comum do conceito. Esta base corresponde à identificação do significado do conceito, ou seja, aquilo que é comum e relacionado ao conteúdo. Este está presente em todas as situações experimentadas pelo estudante com o objetivo de promover sua aprendizagem. As orientações devem ser promovidas em torno da Base Orientadora da Aprendizagem – BOA, que será discutida posteriormente.

Já as *representações* de um conceito permitem sua externalização, na forma de definições, equações, sentenças matemáticas, entre outras formas de comunicação do pensamento matemático. Ao elaborar um conceito, o estudante deve ser capaz de transitar entre suas diferentes formas de representação, com segurança (DUVAL, 2011).

A construção do conteúdo de ensino nessa proposta evita a sobrecarga dos programas escolares. Sua capacidade informativa permite que os alunos assimilem os conhecimentos de maneira independente, não só dos conhecimentos já adquiridos, mas também dos novos conhecimentos (TALIZINA, 2000).

Os alunos, ao estudarem o conteúdo de ângulos, por exemplo, se deparam com muitos tipos particulares de ângulos (segundo o tamanho e a relação com outro ângulo). Cada tipo particular participa como objeto independente da assimilação. Contudo, se queremos que o aluno atente para a base do conceito de ângulo, seria necessário chamar sua atenção para três elementos: *a definição de vértice; as dimensões dos lados; e a posição dos ângulos no espaço.* Normalmente os professores, ao introduzirem tal estudo, discutem apenas as suas particularidades, como as variantes angulares (ser agudo, obtuso, adjacente, retos, opostos pelo vértice, suplementar, complementar, alternos internos e externos, dentre outros) não atentando para as características essências do estudo.

A identificação da base do conceito na construção de um conteúdo escolar disciplinar possibilita um direcionamento no ensino de determinados conteúdos. Talizina (2000) indica vários pontos favoráveis a este respeito: a redução do volume da matéria escolar; o aprofundamento do conhecimento; a redução do volume dos conteúdos escolares; e a redução do tempo de seu estudo (de 25% a 30%), facilitando a aprendizagem.

Para essa autora, todas as ações que participam da atividade da aprendizagem escolar estão categorizadas como sendo gerais ou específicas, sendo as primeiras utilizadas em diferentes conhecimentos. Estas ações se relacionam com a habilidade para planejar sua própria atividade, a habilidade para controlar qualquer tipo de atividade, entre outras. Os tipos gerais de conhecimentos se relacionam com os meios lógicos de pensamento como: a comparação, a condução para o conceito, a dedução de consequências, os métodos de demonstração, de classificação, dentre outros. Condicionalmente, todos estes se relacionam com as habilidades psicológicas: habilidade para recordar, habilidade de atenção, habilidade de observação, dentre outras (TALIZINA, 2000).

A ação específica reflete as particularidades do objeto de estudo, por isso são utilizadas dentro dos limites da área dada de conhecimentos. Como exemplos de ações especificas na Matemática podemos ter a análise aditiva, dentre outras. Assim, em lugar do ensino de conteúdo particular, se obtém a possibilidade de formar o pensamento dos estudantes de modo geral.

Em síntese, a análise dos objetivos e do conteúdo do ensino conduz a compreensão da essência e a buscar metodologias de ensino que direcionam a aprendizagem de conteúdos escolares. A este respeito, Talizina (2000) indica o processo de assimilação que representa a atividade do estudante com o conhecimento. Assim, os discentes são convidados a realizarem os tipos de atividades necessárias para a solução dos problemas que estão discriminados nos objetivos de ensino. Uma aproximação desse processo será discutida posteriormente, considerando a proposta teórica já apresentada.

3.5 ETAPAS DE FORMAÇÃO DO CONCEITO

A Teoria da Formação Mental e dos Conceitos descrita por Galperin (2009) evidencia cinco etapas do processo de assimilação da ação: a criação, a material ou materializada, a linguagem externa, a linguagem interna e por fim, a etapa mental.

A primeira etapa remete a *criação,* que segundo o autor parte da elaboração de um projeto de ação, que consta da base orientadora que o aluno se guiará para realização da ação. Após a etapa de criação seguimos para a forma *material (ou materializada*) desta ação, que a primeira forma de construção externa do aluno. A terceira etapa é *a linguagem externa,* a ação se separa das coisas (ou de suas imagens materiais) e passa para ao plano da linguagem em voz alta. (linguagem externa). Em seguida, a ação é realizada mediante a conversão para si, mas imprecisa em seus componentes verbais e conceituais. Trata-se da etapa da linguagem interna. A ação no plano da linguagem para si, na etapa seguinte (assimilação da ação), transforma-se em um processo automático e, como consequência, chega-se à consciência deste, precisamente em sua parte verbal, e, em seu sentido mais complexo, em um processo interno, atinge-se a última etapa (a mental) (GALPERIN, 2009).

Desse modo, a linguagem participa de todas as etapas de formação da ação mental, mas de diferentes modos. Na ação material a linguagem serve somente como sistema de indicadores desta realidade material; na etapa seguinte, impregna-se da experiência da última ação. Em cada uma das etapas, são formados tipos especiais de linguagem. Assim, as ações, que depois se convertem em mentais, primeiro foram externas, materiais. As ações mentais são um reflexo, que derivam das ações materiais, externas, segundo Galperin (2009).

Na psicologia pedagógica apresentada por Talizina (2000), é considerada dois tipos de ações: as ações gerais, que são aplicáveis para os vários conteúdos escolares, e as ações específicas que são aplicáveis para conteúdos particulares. Entre as generalizações podemos observar as ações de reconhecimento, de classificação e de condução ao conceito, entre outras.

A unidade de análise deve garantir a conservação de todas as particularidades da atividade. Em se tratando de conteúdos de ensino esta unidade é composta pelo motivo, o objetivo, a base orientadora, os meios de execução e os resultados da atividade. Descreveremos cada uma destas com seu nível de detalhamento, adiante no texto.

O motivo da ação sempre se refere à etapa motivacional do sujeito e sua vontade, que é considerado como um componente estrutural da atividade. A atividade do sujeito sempre corresponde a alguma necessidade e se dirige ao objeto que podem satisfazer esta necessidade. O objeto impulsiona e dirige a atividade do sujeito, por isso a aprendizagem só tem êxito quando satisfaz a necessidade cognoscitiva do sujeito (TALIZINA, 2000).

A aquisição do conhecimento, para o domínio dos quais se dirige a aprendizagem, participa como motivo, e nele a necessidade cognoscitiva do aluno encontra sua realização objetal e, simultaneamente, participa como o objetivo da atividade escolar. No caso do estudante não ter a necessidade cognoscitiva, então este não vai estudar ou vai estudar para satisfazer alguma outra necessidade imediata. Isso ocorre em muitos casos, por exemplo, quando o estudante vai à procura da escola para a realização de outro fim, que não a aprendizagem (pela “bolsa escola” do governo; para realizar um “sonho” de família, dentre outros). Nestes casos, a aprendizagem já não será uma atividade, pois a aquisição do conhecimento não conduz à satisfação da necessidade do sujeito, mas do outro. A aprendizagem se converte em ações que se incluem em outra atividade e os conhecimentos, como objetivo da ação, não cumprem a função de motivadora da aprendizagem, uma vez que o que impulsiona o processo de aprendizagem não é a aquisição do conhecimento, mas outros motivos.

A esse respeito Talizina afirma que Leontiev descreveu a via geral do desenvolvimento das necessidades do homem, que se inicia a partir dos momentos nos quais ele atua para satisfazer suas necessidades vitais elementares. No decorrer do processo, essas relações se invertem: agora o homem satisfaz suas necessidades vitais para poder alcançar outros objetivos que correspondem a suas necessidades superiores. O objeto se chama precisamente motivo da atividade. Devido a isto, Leontiev denominou o objeto como necessidade objetivada (concretizada) (TALIZINA, 2000).

Talizina (2000) classifica os motivos (motivação) da realização das atividades escolares em dois tipos: externos e internos. Os motivos externos não se relacionam com as ações que se assimilam com a atividade que se realiza. Um exemplo ocorre quando um estudante deseja cursar Geografia em nível superior, mas não gosta de Matemática. Ele sabe que só passará para o curso escolhido se atingir uma pontuação mínima nessa disciplina nas avaliações de massa que lhe possibilitarão ingressar no curso. Por isso ele estudará Matemática apenas para atingir seu objetivo maior.

No caso da motivação interna, essa ocorre quando o sujeito tem o interesse cognitivo relacionado ao objeto de estudo, ou seja, este coincide com o objetivo da atividade. Nesse caso, a atividade satisfaz a necessidade cognitiva do aluno de maneira imediata e, deste modo, após a realização do motivo, a próxima característica essencial da ação estaria determinada pela presença do objetivo consciente.

O objetivo sempre se reflete na consciência do sujeito, no qual não necessariamente ocorre com o motivo de toda a atividade. O caráter objetal da atividade, que a diferencia de outras atividades humanas, se encontra no objetivo de sua realização. Assim, durante o processo escolar, o sujeito não tem nenhum outro objetivo que não seja a assimilação da experiência social. Esta é a principal diferença da aprendizagem da atividade escolar em relação a outros tipos de atividades. É importante observar que neste momento as ações aprendidas se convertem em operações que devem ser refletidas na consciência do sujeito (TALIZINA, 2000).

As ações que estão incluídas na atividade escolar com relação aos aspectos motivacionais e os objetivos conduzem a sistemas diferentes. No ensino tradicional, o conhecimento se encontra no centro da atenção. O professor expõe o conteúdo da matéria existente nos programas de ensino, procedendo da seguinte forma: “passa” algo (conteúdo) para os estudantes, que não é explicitado com profundidade (essência).

Para solucionar esse problema o professor necessita de uma Base Orientadora da Ação - BOA, que é o sistema de condições no qual o sujeito deve se apoiar durante a realização da ação. A BOA pode ser completa (suficiente), incompleta, correta ou incorreta. De acordo com sua generalidade pode ser classificada de forma particular (caso concreto) ou de forma geral (representação de uma classe) (GALPERIN, 2009; TALIZINA, 2000). De acordo com o meio de obtenção, a BOA pode ser oferecida ao aluno, de forma já elaborada; pode ser elaborada previamente ou ainda pode se obtida pelo estudante de forma independente. No nosso estudo, optaremos pela a discussão e elaboração da BOA com os estudantes da EaD.

De acordo com Galperin (2009), podemos obter a BOA segundo as suas características com relação à generalidade (particular ou geral); a forma (incompleto ou completo/ correto ou incorreto) e segundo o meio de sua obtenção (já elaborada, em conjunto ou individual). Ela classifica a BOA em três tipos principais: com estrutura incompleta (tipo I); com estrutura completa de caso particular (tipo II) e com estrutura completa de caso geral (tipo III).

A *BOA do tipo I* contém uma estrutura incompleta, ou seja, as suas orientações são dirigidas para um caso particular, sendo resumida e apresentando o conhecimento de forma limitada e incorreta. Este tipo de estrutura dificulta o processo de formação por se mostrar muito lento, ocasionando uma grande quantidade de erros pelos estudantes. A ação formada resultante se adquire de forma independente, por meio de “ensaio e erro”, apresentando-se muito sensível com relação às trocas das condições de sua execução. A este respeito Núñez e Pereira (2013, p. 104) afirmam que “[...] em geral a base orientadora da ação nova não é indicada ou indica-se de maneira insuficiente. A orientação do sujeito transcorre por meio de indicadores isolados e é de frágil e incorreta.”

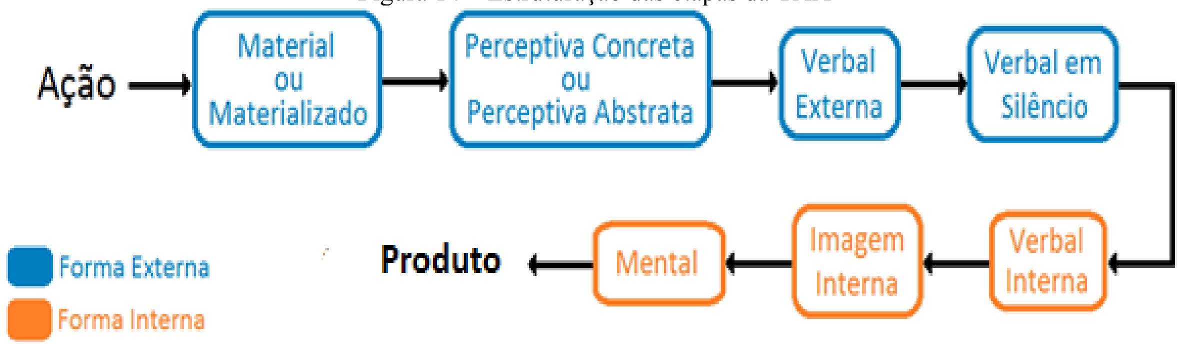
A *BOA do tipo II* é classificada como tendo estrutura completa por apresentar as condições necessárias para a realização da correta ação da atividade, porém, é elaborada pelo professor e entregue aos alunos. Este tipo de orientação é aplicado apenas para casos particulares, sendo útil para casos concretos. A formação da ação ocorre rapidamente e sem erros, de forma mais estável, quando comparamos com o primeiro tipo de orientação, contudo, é limitada e oferece êxito apenas em condições concretas de execução.

A *BOA do tipo III* possui estrutura completa e sua orientação envolve o caso geral que caracteriza toda a classe de fenômenos de um determinado conteúdo. O sujeito elabora sua orientação e se orienta através do que lhe é apresentado. A ação que é formada a partir desta orientação ocorre de forma estável, rápida, correta, possibilitando ao estudante a ampliação de seu conhecimento. As orientações poderão desenvolver a verdadeira criatividade do estudante no processo final.

O penúltimo tópico que trata dos conteúdos de ensino refere-se aos meios de execução e, em seguida, o último ao resultado da atividade. Os meios de execução da ação são identificados segundo seu plano e forma de realização. Galperin (2009) e Talizina, Soloviera e Rojas (2010), baseados nos estudos de Vigotsky (2007), afirmam que, segundo a execução, a atividade pode ser classificada em dois planos: interno e externo. Os autores consideram que estes planos de ação podem ser subdivididos, segundo sua etapa de execução em: material ou materializada, perceptiva, verbal externa, verbal em silencio, verbal interna, de imagem interna e por fim, a mental. Todas estas discussões serão mais bem detalhadas no próximo tópico deste texto.

Com relação ainda as etapas de execução, Talizina, Soloviera e Rojas (2010) indicam que estas podem ser classificadas também segundo sua forma. A este respeito apresentam as seguintes etapas: material ou materializada; perceptiva (concreta ou abstrata); verbal externa e verbal em silêncio, dão-se externamente, ou seja, no plano externo do sujeito, indicando a presença externa de uma imagem. As demais (verbal interna, de imagem interna e mental), ocorrem de forma interna, no plano interior, indicando que nenhuma imagem está presente diante do sujeito (Figura 14).

Figura 14 – Estruturação das etapas da TAA



Fonte: Talizina, Soloviera, Rojas (2010)

A figura 14 apresenta as etapas da Teoria da Aproximação da Atividade sugerida por Talizina, Soloviera e Rojas (2010). Apesar de a figura apresentar as etapas do processo de assimilação de forma hierárquica e linear, isto não ocorre, obrigatoriamente, sendo oferecida esta organização pelo pesquisador apenas para melhorar um melhor entendimento da TAT, ou seja, este processo não ocorre necessariamente seguindo uma execução linear disposta, podendo ocorrer de forma simultânea, principalmente as formas internas do processo.

Talizina (2000) complementa afirmando que o conhecimento dos planos (externo e interno) e das formas das ações (material ou materializada, perceptiva concreta ou perceptiva abstrata, verbal externa, verbal interna, verbal interna, imagem interna e mental) é essencial para o desenvolvimento de propostas metodológicas eficientes de ensino e para realização de correções de problemas de aprendizagem escolar.

As formas material e perceptiva estão presentes nos seres humanos desce seu nascimento. As demais são adquiridas conforme a evolução do sujeito, como resultado da interação social, cultural e de formas organizadas, como o ensino escolar.

Com relação ao último tópico, que trata dos conteúdos de ensino, temos os resultados da atividade. O resultado da ação (produto) é a sua assimilação (ação), que pode ser, por exemplo, a resolução de um problema matemático, a construção de um objeto material, a elaboração de uma imagem, dentre outros. No caso do estudante, o resultado é a sua aprendizagem e, consequentemente, seu desenvolvimento. Ao obtermos os resultados da ação, estes podem ser categorizados como: redução, automatização, e, por fim, a assimilação completa da atividade.

O processo de redução da orientação da atividade é gradual. Inicialmente as ações tem que alcançar a forma estabelecida através dos objetos de ensino, generalizando-se dentro dos limites necessários e, só depois disto, se deve transformar em hábito e, posteriormente, apresentar-se em sua forma reduzida. Dizemos que um conceito foi automatizado, segundo Taizina (2000) quando, diante de uma série de operações, o aluno a realiza de forma gradual, no campo da consciência, e só se adequa o controle sobre sua execução. Temos como exemplo uma situação onde o estudante escuta e, simultaneamente, escreve. Neste caso, dizemos que a ação da escrita se realiza de maneira automatizada.

Com relação à assimilação das ações, os estudos de Talizina (2000) indicam que existem diferentes maneiras de se dar esse processo em relação a um mesmo conteúdo. Por exemplo, o aluno realiza a ação de manipulação de palitos para solucionar um problema aritmético na Matemática, ou ainda pode resolver este mesmo problema utilizando seus dedos (a forma materializada da ação). Outro aluno pode realizar estas ações por meio da visualização do objeto (da forma perceptiva). As mesmas ações podem ser realizadas recitando-se em vocé alta (na forma verbal externa), assim como mentalmente, quando todas as operações se realizam em silêncio (da forma da ação mental). Desta forma, durante a organização do processo de assimilação, é necessário planejar não só um ou outro sistema de ações, mas também sua qualidade e sua característica.

Cada ação humana se caracteriza por um sistema que se dividem em primárias (que possuem características básicas independentes das ações); e secundárias, que possuem características importantes como a estabilidade, o caráter consciente e razoabilidade - estas últimas se formam a partir das primeiras (GALPERIN, 2009).

Ao analisar uma ação, é impossível ignorar o conteúdo concreto de seus componentes estruturais, isto é, como se expressa e qual é o conteúdo do motivo (objeto), a base orientadora da ação, os meios e o resultado (produto). A cada ação humana podemos atribuir um sistema de características que o definem. Talizina (2000; 2010) afirma que a Psicologia contemporânea não tem um conhecimento completo e definitivo sobre a assimilação da atividade, mas que os estudos continuam com este objetivo.

O processo de assimilação dos conhecimentos implica na realização de ações cognitivas e afetivas, no ambiente escolar, por parte dos estudantes. Por isso, durante o planejamento da assimilação de qualquer conhecimento, é necessário determinar as habilidades necessárias que deverão ser utilizadas para que eles alcancem os objetivos a serem assimilados. Assim, foram estabelecidas regularidades de assimilação, a partir da Teoria da Formação das Ações Mentais e dos Conceitos, iniciadas nos trabalhos de Galperin. Com base nessa teoria foram delimitados os processos de assimilação da atividade, segundo sua execução em: material (ou materializada), perceptiva, verbal externa, verbal em silêncio, verbal interna, de imagem interna e a mental.

A primeira etapa da assimilação da ação, mostrada na Figura 14, é a etapa *Material ou materializada*, na qual o objeto de estudo é o próprio objeto (material) ou sua representação (materializada). Talizina (2000) afirma que a formação da ação é realizada por intermédio de objetos materiais e com a ajuda de um modelo, previamente elaborado, denomina de *cartão de estudo*, que apresenta condições concretas da ação e que troca mais importante da ação se relaciona com sua forma material ou materializada.

A forma material (ou materializada) da ação ocorre quando representamos o objeto da ação, ou seja, esta representação substitui o objeto. Para que isso ocorra é necessário que ocorra a devida correspondência entre o objeto que se modela e seu significado em relação às características que constituem o objeto de assimilação. Neste caso podemos usar vários tipos de representações do objeto.

Duval (2008, p.102) afirma que este ato é indispensável na Matemática: “[...] não há pensamento matemático sem o uso de representações semióticas para transformá-las em outras representações semióticas”. Também podemos utilizar instrumentos tecnológicos nessa etapa, como os aplicativos de computadores para simular a representação do objeto da assimilação. Como indica Talizina (2000), o uso de computadores serve de apoio ao professor em várias etapas do processo de assimilação, permitindo-lhe, por exemplo, verificar o nível de partida das tarefas cognitivas dos estudantes e suas particularidades individuais, de maneira completa.

Duval, (2011, p. 137) também trata do uso de computadores no ensino de Matemática, especificamente, no estudo de funções, ao afirmar que: “[...] os computadores não constituem um novo tipo de representação e isso por uma razão simples: as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual”.

Talizina (2000) alerta para que os elementos estruturais da forma materializadas sejam completos, no sentido de que sua forma permita garantir todas as condições equivalentes da forma material de suas operações. O aplicativo *GeoGebra,* usado no estudo de conteúdos matemáticos, enquadra-se bem na proposta defendida pela autora, ao proporcionar a construção de conceitos matemáticos em várias representações, em especial, no estudo de Triângulos.

A forma *perceptiva* pode ser subdividida na forma perceptiva concreta ou abstrata. A forma perceptiva concreta se refere à imagem visual do objeto, enquanto que a forma perceptiva abstrata que é apresentada sob a forma de esquemas e símbolos. Em ambos os casos, Talizina, Soloviera e Rojas (2010), e estudos de seus colaboradores (SOLOVIERA; QUINTANAR, 2006; 2008a; ZAPOROZHETS, 1986; FELD; ESLAVACOBOS, 2009), afirmam que esta etapa da Teoria da Aproximação da Atividade refere-se a presença externa de uma imagem (concreta ou esquemática), já que na forma interna estas representações não estão presentes, diante do sujeito.

A percepção do sujeito orienta-o nas ações da atividade de forma gradual. A partir da mediação do professor, o estudante opera com os objetos e os percebe como provenientes dos reflexos surgidos da orientação que se inclui na ação. Neste momento, o estudante é convidado a atuar sobre e com o material, primeiro na forma de manuseio ou manipulação (aplicativos), depois na forma de esquemas. No primeiro momento usamos ao máximo nossos sentidos de audição, tato e visão, e outros que porventura se fizerem necessários.

Talizina (2000) acredita que neste momento usamos duas etapas da Teoria da Aproximação da Atividade: a concreta e a abstrata. Duval (2008) afirma que, no caso da Matemática, nem sempre podemos usar as formas perceptíveis diretamente, pois, em razão da natureza do conhecimento dessa Ciência, eles são acessíveis apenas pela via da representação.

A forma *verbal externa* é o reflexo da ação perceptiva, material ou materializada. Nesta etapa, o estudante deve orientar-se na realização da ação, tanto com base na orientação do conteúdo, quanto na expressão verbal, baseada na discussão. Talizina (2000) afirma que a orientação apenas na forma oral, neste momento, conduz ao desenvolvimento da habilidade e do conhecimento apenas em seu aspecto formal.

Contudo, quando o estudante se orienta apenas nas etapas anteriores (perceptiva, material ou materializada) sem refletir na linguagem, é capaz de realizar uma série de tarefas práticas, onde se fazem necessários apenas os processos anteriores, mas estes procedimentos são insuficientes para formarem o raciocínio para argumentar, para pensar logicamente na ação, ou seja, para refletirem sobre o resultado obtido ao solucionar os problemas. Quando alteramos alguns destes aspectos da ação verbal ela é organizada de forma defeituosa.

Quanto à etapa verbal externa, Pereira e Núñez (2013, p. 110) completam esse pensamento ao afirmarem que na etapa de verbalização da ação esta é modificada:

> [N]a etapa da linguagem a ação altera radicalmente sua forma: de transformação das coisas, converte-se acerca dela. Este raciocínio forma-se sob o controle do professor e, de acordo com suas exigências, o licenciado começa a enfocar sua ação com estas mesmas exigências.

Galperin (2009) afirma que na linguagem externa há uma transformação da atividade, tanto no processo quanto na ação, à medida que estes são assimilados. A formação completa e válida da ação verbal se refaz por trás das palavras, ao se converterem em seus significados. A este respeito, Duval (2008) complementa afirmando que a atividade matemática é sempre baseada em uma sequência de mudanças sucessivas de uma representação semiótica para outra, sem qualquer informação de fontes externas. Isto pode ser observado não apenas no uso mais elementar de números e figuras geométricas, mas, também, em Álgebra e no Cálculo. Isto significa que são sempre bem-vindas as mudanças da ação na atividade matemática, na sua representação, do material para a verbal externa, por exemplo.

Para Talizina (2000), quando o estudante domina a escrita, a etapa de verbalização pode ser substituída, da linguagem oral para a linguagem escrita, na forma verbal externa da ação. No acaso da Educação a distância, esta pode ser uma alternativa exitosa, quando utilizarmos aplicativos matemáticos. Neste caso, o estudante deve descrever todo o processo de execução da ação, elegendo as suas características e procedimentos na obtenção do resultado do problema para se trabalhar a consciência.

A etapa da *ação verbal em silêncio* é desencadeada ao "acostumarmos" os estudantes a apresentarem oralmente todas as operações que realizam. Estes recordam o fazer e o dizer. Gradualmente, as etapas anteriores desaparecem, sendo substituídas pela ação verbal em silêncio do sujeito. Neste momento o estudante resolve as tarefas de forma individual, em silêncio, para si. O aluno pronuncia todas as operações, mas já sem o som externo. Esta é a última etapa realizada no plano externo do sujeito. As ações que seguem são realizadas no plano interno. (TALIZINA, 2000)

A etapa *verbal interna* consiste na transição da forma externa da ação para forma interna, no sujeito. Gradualmente, a pronúncia se faz desnecessária, a ação já se realiza com ajuda da linguagem interna. Neste caso, dizemos que a ação passa da forma externa para a forma interna. Este processo se baseia nos estudos de Vigotsky (2007) acerca da discussão do par dialético interiorização/externalização dos processos psicológicos, os quais aparecem, como já afirmamos, primeiro como processos externos, e, depois, como processos internos.

Talizina, Soloviera e Rojas (2010) afirmam que, nesse momento, o princípio da relação inseparável entre a psique e a atividade é reafirmado. Neste sentido Leontiev, dando continuidade aos estudos de Vigotsky, afirma que a interiorização é uma transformação dos processos externos, com os objetos externos se convertendo em processos internos, em objetos internos, no plano da consciência. Talizina (2000) continua os estudos e afirma que é na etapa da verbalização interna, que ocorre como um processo gradual, dialético, que se dá o resultado de diversas atividades correspondentes no interior do sujeito.

Ao elaborar a *imagem interna* do objeto, todos os procedimentos realizados anteriormente, de forma externa, agora deverão ser realizados na forma interna, segundo Talizina, Soloviera e Rojas (2010). As operações são realizadas de forma consciente, na mente do sujeito, sem a presença de imagens perceptivas, mas apenas de imagens internas. Agora o sujeito opera os objetos na mente, sem auxílio de nenhum meio auxiliar externo. As imagens são potencializadas até que chegue a um nível satisfatório de automatização.

A forma *mental* da ação é a forma final do processo, sendo internalizado o par dialético: conceito e ação. Antes o aluno realizava a ação como prática, transformando os objetos externos, agora a realização é em sua mente, operando com as imagens destes objetos de forma automatizada, com rapidez, generalização e solidez, itens dos quais tratamos adiante.

Ao passar de uma etapa a outra do processo, segundo Talizina, Soloviera e Rojas (2010), a ação se modifica e é assimilada pelo estudante, transformando-se em um novo conhecimento cujas características são essenciais e relevantes, necessárias e suficientes para o estabelecimento da aprendizagem.

3.6 ETAPAS DE CONTROLE

O controle da atividade faz parte do processo da assimilação da ação. Segundo Talizina (2000), o controle é fundamental no processo de escolarização. Este processo é uma parte inseparável da aprendizagem, ocorrendo antes, durante e depois da atividade de ensino. Deste modo, a autora classifica o processo de controle em três fases: o controle prévio, o controle corrente e o controle final.

O *controle prévio* corresponde à primeira etapa de controle. Constitui-se neste momento o estabelecimento do nível inicial cognitivo. Nele o professor deve relembrar o conteúdo anterior, intermediando-o com o próximo conteúdo, com intuito de desenvolver determinados tipos de atividades cognitivas no estudante e durante a organização da assimilação de tarefas concretas. Durante a organização do ensino é necessário considerarmos uma série de particularidades do aluno. A assimilação de qualquer conhecimento e habilidade nova pressupõe um nível determinado de desenvolvimento da atividade cognoscitiva dos estudantes: a presença daqueles conhecimentos e ações, cuja base se constitui o novo. Deste modo, são importantes os conhecimentos disciplinares, mas também os conhecimentos lógicos.

Para o estudo de Matemática são necessárias as ações de comparação, de reconhecimento, de dedução, de consequências do fato, de correspondência do objeto com a classe dada, dentre outros. Ao mesmo tempo, os estudantes que concluem hoje o ensino básico não adquirem a maioria das ações necessárias, ou seja, não formamos, ou formamos de forma insuficiente, a base para construção de novos conhecimentos. Isso se confirma com o alto índice de analfabetos funcionais, principalmente na região nordeste do Brasil (BRASIL, 2012). No caso do nosso estudo realizaremos ações de cunho comparativos e de reconhecimento com relação à formação do conceito de triângulos nos estudantes participantes da pesquisa.

No controle prévio da assimilação da ação, observamos que, no caso da organização do processo de ensino, se não forem identificados os problemas de ensino em conteúdos anteriores, estes continuarão nos anos posteriores. Assim, os conhecimentos irão ser construídos sobre uma base de conhecimentos e ações prévias incompleta, insuficiente e mal formada. Na Matemática isso ocorre com frequência e é um problema sério, pois compromete todo o processo, causando traumas, muitas vezes, irreversíveis.

Talizina (2000) adverte sobre a prática da repetição, que é ineficiente neste caso. Uma solução apresentada pela autora seria a prática individual com o professor ou o uso adequado do computador, munido de um bom aplicativo que favoreça a aprendizagem do estudante ao controlar não somente o nível de partida, mas, também, corrigir falhas anteriores.

Outra etapa do processo é o *controle corrente,* que ocorre durante toda a ação da atividade. Sua principal característica é a aferição de retorno, que compreende a informação acerca do processo de assimilação do indivíduo, em cada um dos estudantes, de forma sistemática, no decorrer das etapas de assimilação. Talizina (2000) afirma que o conteúdo de controle, quando é realizado na função de aferição de retorno, caracteriza-se por ter a informação não apenas do caráter correto ou incorreto do resultado final, mas da possibilidade para realizar o controle sobre o transcurso do processo, para seguir as ações dos alunos.

Na realidade, o processo escolar deve se organizar não apenas para obter as respostas corretas dos alunos, mas para ensiná-los as ações necessárias, que conduzem a estas respostas. Sabemos que uma mesma ação pode ser realizada de diferentes formas: material ou materializada, perceptiva, dentre outras. Assim, o professor só pode ajudar a formar as ações cognitivas no estudante se este controla, de forma sistemática, a ação no momento necessário e com a frequência devida.

O atraso de alguns alunos muitas vezes ocorre na etapa da verbalização oral. Isso indica que o professor não controlou, de forma satisfatória, a etapa anterior, no momento adequado e continuo e que não houve a formação da ação, anteriormente. O professor deve atentar neste momento, para como o aluno realiza (ou não) a ação e como esta ação se forma (ou não) com relação à automatização, rapidez na execução, dentre outros. (TALIZINA, 2000).

Uma pergunta que surge imediatamente é: como fazer isso com turmas numerosas de estudantes, com frequência? Para respondê-la a autora indica duas possíveis soluções. A primeira é a elaboração de uma tabela (Tabela 01), contendo todas as informações sobre as tarefas realizadas pelos estudantes. O controle é realizado tendo como base as respostas corretas para cada operação. Na folha do aluno são atribuídos códigos (+, -, ?) que podem ser decodificados por meio de uma folha de papel transparente, onde seriam colocadas as respostas corretas, exatamente, com a mesma medida da tabela dos alunos. Quando uma estivesse sobreposta com relação a outra poderia ser realizada a conferencia das respostas. No caso da verificação da resposta (decodificação) correta é atribuída uma cor, caso esteja errada é atribuída outra cor.

TABELA 01 – Registro do controle realizado pelo professor

Características		**Número de tarefas**								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+									
	-									
	?									
2	+									
	-									
	?									
Respostas	+									
	-									
	?									

Fonte: Adaptado de Talizina (2000)
Nota: + (o objeto tem a característica dada); - (o objeto não tem a característica dada); ? (não se sabe)

Uma segunda alternativa seria trabalhar o controle em pares. Divide-se a turma em grupos de dois estudantes, sendo que cada um deles recebe uma tarefa diferenciada. Um trabalha na execução da tarefa de forma usual, enquanto o outro recebe a tarefa para o controle da atividade do primeiro. Para a realização deste trabalho são recebidas todas as indicações necessárias. Caso o professor observe que as opiniões dos estudantes divergem em algum momento, este realiza a mediação através da ajuda verbal ou por meio de algum material previamente elaborado, que esclareça sobre o assunto em discussão.

Assim, a etapa de controle inicial (controle prévio) e a corrente são realizadas pelo professor, enquanto a etapa de controle posterior (controle final) é realizada pelo próprio estudante, que tem a oportunidade de desenvolver a sua autonomia. Kamii, (1990); Piaget (1968); Freire (1995) e Alves (1994) discutiram em alguns de seus trabalhos sobre a autonomia intelectual desenvolvida no ambiente escolar. Os autores comungam sobre a importância de proporcionarmos atitudes corretas no estudante ao convidá-lo a realizar suas próprias escolhas, não por pressão, castigo ou recompensa, mas por permitir que estes expressem suas respostas (corretas ou não), não por que alguém lhe mostrou, mas porque a encontrou. Essa atitude faz com que o estudante adquira a consciência de seus atos e reflita sobre eles.

Talizina (2000) afirma que é útil ensinar aos alunos as ações próprias de controle, pois elas constituem uma parte muito importante da habilidade para estudar e, posteriormente, possibilitam que realizem as correções necessárias durante o transcurso de assimilação de maneira independente. Este processo se relaciona com a habilidade para encontrar e corrigir as soluções incorretas, permitindo que os estudantes controlem um ao outro, gradualmente; e aprendendo a controla-se a si mesmo. Eles ficam mais atentos e é desencadeado um processo de alta efetividade do ensino.

Todavia, os principais indicadores de controle são determinados pela(o): realização correta da ação; tempo de realização; forma da ação; caráter consciente e razoável da ação; generalidade e estabilidade (o que pode ser verificado em meses posteriores). De modo geral, o controle pode ser realizado pelo professor, pelo aluno (autocontrole) ou por outro aluno (controle recíproco) e seu aspecto sistemático influencia diretamente na assimilação dos conceitos. Assim, Talizina (2000) estabelece três exigências básicas para que seja realizado o controle escolar em sua Teoria:

1. Nas etapas iniciais do processo de assimilação, se deve realizar o controle das operações;

2. No início da etapa material (materializada), realizada pelo professor, na verbalização externa, realizada por outro aluno. O controle deve ser sistemático, devendo-se controlar cada tarefa que a ser realizada;

3. Ao final destas etapas, assim como nas etapas seguintes, o controle externo deve ser episódico: de acordo com o pedido do aluno ou diante da presença de erros constantes.

Deste modo, Talizina (2000) indica algumas situações onde podemos realizar (ou não) o controle:

a. O aluno está seguro de que suas ações são corretas, e estas, objetivamente, estão corretas;

b. O aluno não está seguro se suas ações ou não, objetivamente, suas ações estão corretas, o aluno sente a necessidade de controle;

c. O aluno está seguro que sua resposta está correta e não sente a necessidade de controle, mas sua resposta está errada;

d. O aluno não está seguro se sua resposta é correta ou não, requer o controle, a resposta é errada.

No primeiro caso (a) o estudante não necessita de controle. Nos demais casos (b), (c) e (d) é necessário o controle, indispensavelmente. Este trabalho estimula o aluno no sentido de uma maior atenção na realização da tarefa. No caso da Educação a Distância este acompanhamento é necessário, recebendo o nome de *feedback,* sendo realizado por um professor mediador, que é orientado a realizar a aferição de retorno no prazo máximo de 24 horas (ARETIO 2004; 2006).

O *controle final* constitui a última etapa do controle da atividade. Na prática escolar esta etapa estaria relacionada com as avaliações de conteúdo. Talizina (2000) indica para essa etapa quatro níveis de assimilação do conhecimento: nível de reconhecimento (identificação da ação nas diversas representações); nível de reprodução (seguir o padrão para resolução); nível de aplicação em condições conhecidas (baseado na BOA resolver problemas) e, por fim, nível de aplicação em novas condições (utilização da criatividade). A base de todos esses níveis se encontra no conteúdo da atividade, que deve utilizar os conhecimentos que são assimilados para resolução dos problemas, passando por cada um desses níveis.

Talizina (2000) afirma que os problemas sugeridos para os estudantes devem estar baseados em seu contexto cotidiano, numa linguagem coerente e de fácil entendimento. Para a elaboração dos problemas a autora indica os seguintes passos:

- Ao ter acesso ao novo material, o professor determina os problemas a partir do material seguido pelos estudantes. O professor deve saber argumentar qual a real necessidade de estudos dos conteúdos apresentados aos estudantes;

- Cada problema exige habilidades cognitivas e ações voltadas para sua solução. Assim, com a ajuda dos problemas, o professor pode estabelecer ações cognitivas que direcionem o aluno no uso do conhecimento.

Desse modo, é necessário ensinar aos estudantes quais as ações cognitivas que eles usarão e quais os conhecimentos que estas incluem (como os alunos devem realizá-las, com que rapidez, dentro de que limites, isto é, com que grau de generalidade, dentre outros). Assim, quando o professor ensina, deve atentar para as seguintes características:

a. De acordo com a forma, usar o cálculo mental;

b. De acordo com a generalidade, deve incluir os casos possíveis (generalizar em seu grau máximo);

c. Realizar as ações com rapidez, que garante a automatização e a redução das ações que incluem nesta atividade.

A avaliação dos resultados na etapa de controle final depende de forma direta dos objetivos de ensino. Sabemos que cada professor tem suas próprias normas para qualificar os estudantes, por isso, com as mesmas tarefas de controle, com as mesmas respostas e com os mesmos meios técnicos de controle, obtemos qualificações diferentes nos exames.

Discutindo as funções de qualificação da atividade, Talizina (2000) indica alguns erros, os quais, infelizmente, são frequentes nas instituições de ensino. Os professores, geralmente, utilizam as qualificações dos estudantes como meio de castigo. Esta utilização inadequada do professor destrói sua autoridade diante do estudante e cria um sentimento de injustiça e incapacidade neste. Quando o professor não consegue manter a disciplina, é porque não ensina aos alunos a responsabilidade e, por isso, utiliza meios impróprios na sua atuação, fator inaceitável na formação profissional dos licenciados em Matemática.

3.7 A ELABORAÇÃO DO PROGRAMA DE ENSINO

Ao iniciar o ensino de qualquer componente curricular, o professor deve ciente dos conhecimentos que os estudantes possuem e que serão indispensáveis para a assimilação de novos conteúdos. Este fato também é decisivo na Educação a Distância. Caso estes conhecimentos não tenham sido formados, então é necessário formar as ações que faltam, já no início do trabalho.

Um modo para a verificação do conhecimento é o diagnóstico do estado de partida da atividade cognitiva. Assim, a assimilação de qualquer conhecimento e habilidade nova, pressupõe um nível determinado de conhecimento da atividade cognitiva dos alunos. Este trabalho deve realizar em duas direções: 1. A verificação da presença daqueles conhecimentos específicos (conceitos – ação) que antecipam os conhecimentos novos (conhecimentos prévios); 2. A determinação do nível de conhecimentos lógicos gerais, que se inclui no conteúdo da atividade. Também é importante verificar a presença dos componentes da habilidade para estudar; a habilidade para incluir-se nos trabalhos; a habilidade de ler textos com rapidez adequada; a habilidade de elaborar um plano de trabalho; dentre outras.

Talizina (2000) indica que a etapa de diagnóstico dos diferentes tipos da atividade cognitiva deve seguir a forma geral. Para isso, faz-se necessário: realizar o diagnóstico não só de componente da operação, mas também do componente da motivação de objetivo da ação; identificar previamente a estrutura das operações da ação que se diagnostica; elaborar as tarefas para o diagnóstico; garantir as formas material (materializada), perceptiva, de linguagem externa e mental na realização da ação; variar as tarefas de acordo com o conteúdo objetal e suas condições de aplicação o que permite diagnosticar o grau de generalização desta ação (operação); determinar o estado da ação, de acordo com o grau de automatização; identificar a rapidez da execução da ação por meio de fixação de intervalos determinados de tempo.

A sequência de diagnóstico das operações isoladas da ação central deve ser a seguinte:

a. Inicialmente se realiza o diagnóstico da operação central; em cada ação (hábito) existe uma operação (ação), cuja formação depende do êxito da execução da ação (hábito);

b. Posteriormente, o diagnóstico das operações se realiza na ordem contrária com a formação; esta exigência se faz para evitar o efeito do ensino durante o diagnóstico;

c. O diagnóstico da forma se realiza a partir da forma mental para a forma da linguagem externa e da forma material e

d. Durante o diagnóstico da generalização da ação, inicialmente se deve proporcionar as tarefas com material menos frequente para os sujeitos e, depois, com material mais conhecido.

Os principais elementos até aqui discutidos foram por nós considerados no momento em que planejamos e elaboração das tarefas a serem aplicadas em nossa pesquisa que será detalhada no item seguinte.

3.8 APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA NO ENSINO

O processo de assimilação adotado no nosso estudo está pautado na aproximação da Teoria da Atividade proposta por Talizina (2000) cujo sintetizamos em cinco etapas: a etapa de criação (diagnóstico, motivação, elaboração de esquema da base orientadora da ação); a etapa material ou materializada; a etapa da linguagem externa (verbal externa); a etapa da linguagem interna (verbal em silêncio) e a etapa mental.

Na etapa da criação inicialmente é indicada a realização diagnóstica, isto significa que o professor deve identificar os conhecimentos anteriores que serão necessários para discussão da nova ação e conceito a ser discutido. Feito isso, seguimos para motivação - o professor deve recordar que o caráter dos motivos influencia diretamente sobre a efetividade do processo de aprendizagem escolar. O docente deve elaborar situações que despertem o interesse dos estudantes para adquirir os conhecimentos necessários a aprendizagem escolar.

Na elaboração do esquema da base orientadora da atividade (esquema da BOA) faz-se necessário discutir com os alunos de forma conjunta, o que cria neles a expectativa do descobrimento independente do conteúdo da atividade. Isto tem um significado positivo para a motivação da aprendizagem escolar. Normalmente, para cada esquema novo se indica a elaboração de um cartão escolar especial. O esquema precisa estar presente no momento em que o aluno inicia a resolução dos problemas propostos. Talizina (2000) indica que encontrar a base do processo é a etapa mais complexa da teoria, pois esta não cabe erros e requer domínio completo do processo pelo professor.

As duas etapas anteriores, diagnostico e motivação, são consideradas como prévias. Em todas as etapas, os estudantes são convidados a solucionarem problemas. Desta forma, o programa de ensino deve constituir-se um sistema determinado de problemas que requer a realização de tarefas durante todo o processo de assimilação da ação.

3.9 A ELABORAÇÃO DAS TAREFAS

As tarefas são elementos essenciais no desenvolvimento da assimilação da ação. Estas devem ser adequadamente planejadas na etapa de elaboração. Ao elaborar as tarefas que serão realizadas pelos estudantes, o professor deve considerar apenas a nova atividade que está se formando, pois todas as demais ações (ou tipos de atividades) que são necessárias durante a realização das tarefas ensinadas, devem ter sido assimiladas durante o ensino anterior. Quando nos dirigimos à elaboração de tarefas não estamos afirmando que estas devem ser criadas, originalmente, pelo docente. Estas podem ser adquiridas de materiais didáticos que o processor considere suficiente para discussão do conceito desejado. Podendo ser utilizados livros didáticos, guias de estudo e outros materiais relevantes.

Além disso, a forma do problema deve corresponder à etapa de assimilação. Nas primeiras três etapas, as tarefas se dão em forma material ou materializada. Isto significa que os objetos, com os quais atuam os escolares, devem ser acessíveis para a transformação real. Assim, no caso da formação de conceitos científicos se proporcionam, com objetos reais, ou suas representações em forma de modelos, esquemas e/ou desenhos. (TALIZINA, 2000)

Nas últimas três etapas, as tarefas são realizadas de forma verbal. Os estudantes atuam não com o objeto que se percebe em forma sensorial, mas com o objeto conceitual representado através de sua representação. Em cada uma das etapas da assimilação, a ação sofre modificações de sua forma, mas também incrementa seu grau de generalização, de redução e de assimilação. Tudo isto também se garante através da seleção dos problemas (tarefas) durante a solução dos quais se dá a formação da atividade e através do conteúdo de sua base orientadora.

Devido à generalização das características da tarefa, incluímos a base orientadora da atividade, o estudante deve utilizar o esquema de orientação durante a solução de problemas que requerem a aplicação destas características. Para a obtenção do grau necessário de generalização é necessário propor problemas que reflitam os casos básicos, dentro da área dada. A sequência de apresentações deve basear-se no princípio de contraste. Inicialmente proporcionamos problemas que contenham situações diversificadas, depois as situações mais parecidas.

Desta forma, para a generalização de conhecimentos e ações, é necessário cumprir as seguintes condições: identificação das características, de acordo com as quais se devem generalizar; incluir estas características no conteúdo do esquema da base orientadora da ação; representar todos os tipos particulares de ação por meio da tarefa; incluir problemas com as respostas tanto positiva, como negativa e indeterminada.

A quantidade de tarefas necessárias para se chegar de uma a outra etapa, em relação às características básicas da ação, é determinada através da via empírica. Em diferentes casos, pode ser essencialmente diferente. Isto depende de uma série de condições: do nível de desenvolvimento geral dos estudantes; de suas idades; de sua experiência da assimilação dos conhecimentos por etapas, de sua complexidade e novidade. Assim, a quantidade de tarefas necessárias para a assimilação da *forma materializada* da atividade, quando a maioria de seus elementos é nova, normalmente varia de seis a dez, segundo Talizina (2000).

Para a assimilação da atividade em *forma de linguagem externa*, normalmente se requer mais seis tarefas. Nesta etapa, as exigências para o conteúdo das tarefas, indicadas anteriormente, se conservam. De acordo a estas exigências, a forma das tarefas precisa ser verbal. O processo de solução de problemas se realiza também, na forma verbal, sem apoio externo.

Nas últimas etapas (verbal para si e mental), todas as trocas se dão dentro da *forma verbal*: a atividade passa de sua forma verbal externa à forma mental, que se realiza com a ajuda da linguagem interna. Agora são realizadas as tarefas de um só tipo, que devem se repetir de acordo com as condições da redução e a automatização da atividade, de forma particularmente rápida. A quantidade de tarefas nestas etapas depende do objetivo de ensino: a atividade deve alcançar os indicadores de qualidade, de acordo com a rapidez de sua realização.

Quanto à aferição de retorno, Talizina (2000) indica que devemos atentar para os seguintes passos: os estudantes realizam as tarefas; verifica-se se a tarefa está sendo realizada de forma correta ou não; se a forma da ação que se realiza, corresponde (ou não) à etapa de assimilação; e, por fim, identifica-se a formação (ou não) da ação com o grau necessário de generalização, redução, automatização e rapidez de sua execução, dentre outros aspectos.

Quanto à regularidade do processo de assimilação, Talizina (2000) indica que a informação obtida com a ajuda da aferição de retorno pode significar que: o processo de assimilação corresponde ao programa elaborado; ou que devemos trocar o processo de assimilação. Quanto à orientação das correções, estas devem ser realizadas de acordo com o caráter da informação obtida com a ajuda da aferição de retorno e da lógica interna do processo de assimilação.

Em princípio, o programa das correções se baseia na lógica da transformação das ações dos alunos a partir das formas externas, materializadas, implementadas e não automatizadas. Estas se transformam em ações internas, intelectuais, reduzidas e automatizadas. Assim, obtermos a informação de que o aluno passou por uma ou outra etapa, antes que propunha o programa. Neste caso, a correção se dirige para a redução da via do movimento do aluno para o objetivo, este devendo passar para etapa seguinte antes do que se indica no programa de ensino. Caso o estudante apresente alguma dificuldade na etapa dada, então é necessário regressar á etapa anterior. É importante neste momento prever todas as trocas possíveis no programa e, portanto, é necessária a intervenção do professor durante o transcurso do processo de assimilação.

Quanto ao volume de conhecimentos necessários para a aprendizagem do estudante, Talizina (2000) indica que deve ser feito um planejamento pelo professor antes de sua introdução, bem como um acompanhamento. Neste momento devemos considerar o fato de que o problema inclua não só a quantidade de conhecimento introduzido (por exemplo, quantos conceitos se introduzem simultaneamente), mas também as dificuldades do aluno. Este fato é muito importante no ensino a distância, pois os estudantes possuem uma carga mínima de componentes curriculares a cumprir em um determinado tempo, estabelecido pela instituição de ensino. Aretio (2004) indica que o docente deve prever as principais dificuldades dos estudantes e realizar um planejamento que tente diminuir tais elementos.

Para a definição do volume de conhecimentos inicial é necessário considerar as relações entre seus diferentes elementos, pois a assimilação de conceitos, unidos através das relações lógicas determinadas, ocorre de maneira satisfatória quando estas são introduzidas de imediato no sistema e não na forma sequencial. Este volume dos conhecimentos iniciais deve considerar o nível de partida de desenvolvimento dos estudantes, a novidade e complexidade objetiva da atividade na qual se utilizaram estes conhecimentos. Desta forma, o tempo determinado para realização de cada etapa não é constante, pois ocorre na medida de acumulação da reserva das ações cognitivas, por parte dos estudantes.

Por fim, com base nas discussões anteriores, Talizina (2000, 2001, 2010) adverte-nos para as limitações de sua proposta. A autora afirma que a Teoria da Aproximação da Atividade só foi testada para programas de ensino de forma isolada (por exemplo, Matemática) não se integrando a um programa geral (envolvendo todas as disciplinas, por exemplo) e não sendo usado com adultos.

3.10 NÍVEIS DA AÇÃO

Podemos categorizar os níveis da ação no controle final em: grau de razoabilidade; grau de generalização; grau de independência, o grau de consciência; grau de automatização; o grau de validez e o grau de solidez. As três primeiras categorias caracterizam-se como sendo primárias, as restantes de cunho secundário.

O *grau de automatização da ação* refere-se a velocidade com que o estudante realiza a tarefa. O tornar automático aqui é entendido como o movimento da ação operado por si mesmo. Este movimento necessita executar várias combinações com outras ações, novas ou não, para realizar a tarefa de forma consciente, na qual a ação foi formada. Um exemplo deste movimento seria uma situação de escrita, um ditado, na qual o estudante escuta com atenção e deduz a forma exata de escrever.

Nessa situação, a atenção do aluno se dirige para a ação de escutar. A rapidez da escrita não permite que ele realize esta ação na forma sequencial. Ou seja, o estudante só realizará esta ação de forma correta se já tiver uma consciência constante das operações que deve realizar a automatização da ação. Assim, os problemas que constituem os objetivos de ensino determinam também o conteúdo do controle final.

Nessa etapa, muitos professores preferem utilizar o computador no processo de ensino, pois acreditam que esta ferramenta ajuda na identificação dos erros dos estudantes e na qualidade e rapidez de execução. Talizina (2000) afirma que quando os estudantes estão bem preparados surge um problema no controle final automatizado, pois os estudantes não querem usar as máquinas, sob o argumento de que desejam mostrar o seu êxito a outra pessoa, e não a uma máquina. Percebemos que aqui ocorre um fator puramente psicológico, e a autora indica que nesta fase (controle final) o professor deve acompanhar os estudantes, sendo interessante o uso de computadores como apoio nas etapas de aferição de retorno, na correção e na elaboração das tarefas.

A *redução da ação é um* processo gradual, que se relaciona inseparavelmente com a automatização da ação. Faz-se necessário que o estudante realize uma série de operações, de modo gradual, de forma consciente, para que ocorra a redução e assimilação da ação. Talizina (2000) indica que a redução e assimilação de qualquer ação nova devem ser realizadas de forma completa e com caráter consciente, em todas as suas operações. Apenas neste caso o estudante compreenderá o conteúdo da ação e sua lógica.

O *grau de validez* do conteúdo remete diretamente aos problemas relacionados com o controle para verificação da aprendizagem. A autora indica dois tipos de validez: a *validez de conteúdo e a validez funcional*.

A *validez de conteúdo* se relaciona com os conhecimentos disciplinares na tarefa de controle. A orientação neste momento quanto à qualificação final é que devemos considerar na avaliação dos estudantes não apenas o exame final, realizado geralmente ao fim da unidade, mas também as qualificações anuais. Aqui a validez se relaciona tanto com os conteúdos disciplinares quanto com os tipos de hábitos da atividade cognitiva. Para este controle devemos utilizar dois tipos de tarefas: com questões que requerem a elaboração independente da resposta (resposta construtiva) e com respostas de múltipla escolha.

A *validez funcional* remete aos problemas com ações que se apresentam no controle, ou seja, a verificação dos hábitos específicos e lógicos da atividade cognitiva. Neste momento, a autora faz uma reflexão sobre o uso da tecnologia na etapa de controle e afirma que, na Rússia, quando a tecnologia foi implantada nas escolas, era vista como a solução de todos os problemas educativos. Com o passar do tempo, seu uso (ou uso inadequado) comprometeu o controle das tarefas, ao perceber que as respostas dos estudantes não eram automatizadas na etapa de controle, o que comprometia todo o processo. Realizadas observação sobre o caso, constataram que nas respostas de múltipla escolha os estudantes mostravam um comprometimento na etapa de validez funcional, pois utilizavam a memória mecânica e o método de adivinhação para determinar as respostas.

Em comparação com a proposta da Teoria da Aproximação da Atividade, muitas de nossas escolas não realizam a avaliação das tarefas de forma adequada, pois avaliam apenas as respostas corretas ou erradas, deixando de lado outros itens necessários como a rapidez na execução, a forma de execução (processo mental); o material utilizado (com apoio ou não); o tipo de mediação necessária (aluno/aluno, aluno/professor); dentre outros.

Assim, para que os tipos de validez sejam analisados no ensino, Talizina (2000) propõe avaliar três componentes que devem ocorrer simultaneamente: o conhecimento, o hábito específico e a lógica da atividade cognitiva. Para isso, a autora sugere que seja elaborada uma tabela como a Tabela 02, onde o professor pode registrar o conhecimento ou não do estudante sobre regras, conceitos, definições, tanto do ponto de vista específico quanto lógico.

TABELA 02- Validez do controle final

Conhecimentos	**Específicos**					**Lógicos**				
	1	2	3	4	5	a	B	c	D	E
Regra A										
Conceito B										
Lei C										
Conceito A										
Regra D										

Fonte: Adaptado de Talizina (2000)

O grau de solidez se refere à estabilidade dos resultados que obtemos durante o controle repetitivo. Evidentemente este conceito é relativo, pois depende do tempo e da qualidade do conhecimento obtido. Dizemos que o controle de uma tarefa é sólido quando, ao propormos situações problemas sobre o assunto específico estudado com um grau mais elevado e depois de algum tempo (2 a 4 meses) o resultado é satisfatório.

Infelizmente, na prática escolar observa-se, em geral, que o controle normalmente não é sólido, pois o estudante mesmo tendo boas qualificações durante os exames avaliativos, não têm o mesmo êxito após alguns meses de sua aplicação. Quando o exame é realizado sem o conhecimento do estudante, sem dar-lhe a possibilidade de se preparar para o tema, os resultados também não são satisfatórios. Observamos também que, quando o estudante apresenta um grau satisfatório de validez de conteúdo e de validez funcional, consequentemente, este terá um grau de solidez satisfatório.

O *grau de generalização* da ação está relacionado diretamente com os tipos de atividade cognitiva: geral e específica. A generalização se dá de acordo com as características incluídas na base orientadora da ação. Isto significa que as características estão em todos os objetos, de acordo com o planejamento de sua generalização, sendo utilizadas durante a solução de problemas que requerem a aplicação destas características, ou seja, na base da generalização temos que encontrar as características que têm todos os objetos da classe dada (invariantes).

Durante o estudo do processo de solução de problemas muitos estudantes recebem a definição incompleta dos conceitos. Dessa forma, são omitidas as características essenciais dos objetos, relacionados com a classe dada. Talizina (2000) acredita que o ensino deve ser construído de tal forma que os estudantes, a partir do início dos anos de escolaridade, aprendam a se orientar, necessariamente, no sistema de características essenciais.

A generalização ocorre de acordo com as características que se encontram na estrutura da base orientadora da ação e que se dirigiram para a análise destes objetos. Isto significa que a direção da generalização das ações cognitivas e dos conhecimentos que se incluem nestes, são realizadas com ajuda de controle sobre o conteúdo da base orientadora das ações correspondentes.

A falta de generalização explica alguns defeitos na prática do ensino, principalmente quando o estudante memoriza algum conceito, mas que não constituía na orientação durante a solução do problema. Também explicam os casos em que a generalização se dá de acordo com as características gerais, mas não essenciais (características casuais). Assim, ao apresentarmos o conjunto de características necessárias e suficientes ao estudante através da estrutura da base orientadora da ação, garantimos a orientação sistemática destes, durante a realização de todas as tarefas propostas.

Para a obtenção do grau de generalização da atividade, é necessário utilizar as tarefas que refletem os casos típicos da área dada. A sequência da tarefa deve se basear no princípio dos contrastes: inicialmente, propomos tarefas que contem situações que se diferenciam muito umas das outras, depois, apresentamos situações mais parecidas.

O *grau de independência* está diretamente ligado à autonomia do estudante na realização da tarefa escolar. Inicialmente é normal que o professor, em qualquer conteúdo didático, use a mediação. Este profissional deve realizar com o estudante as particularidades da ação, acompanhando-o em suas ações de uma etapa a outra que, gradualmente, se transforma no ato mental. Ao atingir a internalização da ação, o grau de independência do aluno deve ser atingido de forma que o estudante não mais necessite do acompanhamento do professor ou de qualquer outro material para a realização da tarefa.

O *grau de consciência* da ação consiste em desenvolver no estudante a habilidade para argumentar corretamente a execução da ação, a qual depende diretamente da qualidade de sua assimilação formada na etapa da verbalização externa. É necessário que o estudante tenha desenvolvido a sua atenção, adquirindo a forma especifica de conhecimento. Cabe ao estudante não apenas saber a tarefa, mas também dar-se conta do que sabe e do conhecimento aprendido, isto é consciência. De modo mais complexo, é o desenvolvimento da autoconsciência (consciência que se adquire de refletir sobre si mesmo), no caso sobre sua aprendizagem.

O *grau de razoabilidade* trata de quão adequada é esta em relação às condições que se realiza, isto é, que são essenciais às condições pelas quais se orienta o sujeito. Isto significa que o caráter razoável da ação se determina pelo conteúdo de sua base orientadora. Podemos atingir o grau necessário do caráter de razoabilidade através da identificação correta das condições sob as quais devemos orientar o aluno e através da direção do processo de assimilação.

Diante de tudo que foi exposto neste Capítulo nos propomos a realizar uma aproximação da Teoria da Atividade, como elemento principal na construção de uma organização didática sistemática para discussão de conceitos relativos ao conteúdo de Triângulos, aplicada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB Virtual, vislumbrando o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, elemento essencial na formação de professores de Matemática.

4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA NO SISTEMA DE TAREFAS

A maioria dos adultos afirma que a Matemática é importante, porém difícil, e geralmente lhe atribuem esta dificuldade por acreditarem que esta ciência é um conjunto de regras e cálculos, quase sempre sem sentido, que devem ser “decifrados” por gênios, acreditando que a compreensão e o domínio dos conhecimentos matemáticos só seriam acessíveis aos alunos com talentos particulares. Van de Walle (2009, p.31), critica este pensamento ao afirmar que “[...] as crianças acreditam que a matemática é uma série de regras arbitrárias, transmitidas pelo professor que por sua vez as obteve de alguma fonte muito inteligente”.

Essa visão é oposta à posição que defendemos neste projeto de pesquisa, uma vez que entendemos a Matemática como uma ciência de padrões e de ordem que dá significado a objetos da realidade do indivíduo, sejam eles concretos ou abstratos, acessíveis ou não.

Estudos em Educação Matemática, realizados a partir da década de 1980, desencadearam uma busca por metodologias de ensino da Matemática escolar que permitissem seu melhor entendimento pelos estudantes. Documentos oficiais também apontam esta tendência no ensino de Matemática, ao apresentar diversas metodologias de ensino ao professor em suas orientações curriculares (BRASIL, 1997; 1998; 2006; PARAIBA, 2010).

Diversas tendências metodológicas têm sido discutidas na Matemática, na atualidade, a exemplo da Resolução de problemas (POLYA, 1995; POZO, 1998, DANTE, 2000; VAN DE WALLE, 2009); do uso de jogos e materiais manipulativos (RÊGO, RÊGO, 2004; LORENZATO, 2006); de Atividades investigativas (PONTE, 2005; VAN DE WALLE, 2009); do uso da História da Matemática (MENDES, 2009); da Modelagem (BIEMBENGUT, 2009); da utilização de novas tecnologias (TEDESCO, 2008; BORBA, MALHEIROS, 2007; VAN DE WALLE, 2009); de projetos em sala de aula (BASIL, 2006; VAN DE WALLE, 2009); e da análise de erro (CURY, 2007; VALENTE, 2009).

Todas essas tendências metodológicas de ensino de Matemática têm suas potencialidades e limitações no ambiente escolar, cabendo ao profissional de ensino conhecê-las para poder fazer opções. Em nosso trabalho, além do que já discutimos acerca do uso de novas tecnologias, tratamos apenas da Resolução de Problemas, pois esta se caracteriza como a metodologia central de ensino de Matemática, que deve acompanhar qualquer procedimento de aprendizagem no ensino básico (BRASIL, 1997; 1998; 2000), além de ser foco maior da nossa temática.

4.1 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino de Matemática proposta por diversos autores como: Polya (1995); Pozo (1998); Dante (2000); Van de Walle (2009); dentre outros, que defendem que os estudantes devem desenvolver a capacidade de resolver problemas não apenas para aplicá-los à Matemática, mas para apreender novas ideias embutidas nos problemas, aprendendo novos conhecimentos.

Um problema é entendido aqui como uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução. Esta nova situação de diferencia de um simples exercício à medida que neste utilizamos mecanismos que nos levem, de forma imediata, à solução. Realizar exercícios se baseia no uso de técnicas rotineiras que permitem consolidar esta prática ao resolver situações também rotineiras (POZO, 1998).

A Resolução de Problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exigem dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar respostas a situações variáveis e diferentes.

A solução de problemas estaria mais relacionada à aquisição de procedimentos (conjunto de ações organizadas para a execução de uma meta). Deste modo, ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta (POZO, 1998).

Assim, ensinar o aluno a resolver problemas pressupõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habilitá-los a encontrar, por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou pelo professor (POZO, 1998). O verdadeiro objetivo final da aprendizagem de solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de elaborar problema e de resolvê-lo como forma de aprender. Com base nessa assertiva nos perguntamos: *Como as pessoas resolvem os problemas?* Pozo (1998) afirma que existem duas concepções diferentes de resolver problemas: por processo geral aplicável da mesma forma a todas as áreas (habilidade geral) e por um conjunto de processos específicos a cada uma das áreas do conhecimento (habilidade específica).

No primeiro caso, a solução de problemas como habilidade geral está baseada em Polya (1995), que afirma que para solucionar um problema é necessário colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos. Este autor defende que existem dois tipos de problemas: o dedutivo (demonstração) e o indutivo (estabelecer regularidades). Existe uma dicotomia clara entre *problemas bem definidos*, onde é possível identificar facilmente se foi alcançada uma solução, estão presentes, geralmente, nas ciências naturais e, *problemas mal definidos,* que são problemas pouco estruturados, em que podem ser aceitas várias soluções diferentes e que, geralmente, estão presentes nas ciências sociais.

Segundo Polya (1995), para resolvermos problemas na matemática devemos desenvolver quatro passos: a) compreender o problema (as perguntas explícitas e implícitas); b) conceber um plano (levantar estratégias possíveis); c) executar o plano (materializar o uso das estratégias) e d) fazer uma visão retrospectiva (testar a resposta e analisar sua pertinência).

Já para a solução de problemas como um *processo específico,* os estudos de Pozo (1998) indicaram a existência de diferenças entre especialistas e principiantes na resolução dos problemas. Os principiantes resolvem os problemas de acordo com as etapas sugeridas por Polya. Já os especialistas, inicialmente, tentam conhecer, por meio da experiência e dos conhecimentos específicos numa determinada área ou domínio de conhecimentos, como estes conhecimentos afetam a solução de um problema próprio da sua área. Solucionar problemas, nesta perspectiva, não depende da disposição de estratégias ou habilidades gerais e transferíveis, válidas para qualquer caso, mas sim dos conhecimentos específicos úteis do executor.

Pozo (1998) sugere que alguns procedimentos devem ser seguidos na resolução de problemas específicos de uma área, segundo seus conteúdos. Estes conteúdos podem ser divididos em: conteúdos conceituais e conteúdos procedimentais. Estes últimos podem ser subdivididos em cinco etapas: a. Aquisição da informação (observação); b. Interpretação da informação (decodificação); c. Análise da informação e realização de inferências (comparação com Polya: passos 2 e 3); d. Compreensão e organização conceitual da informação; e e. Comunicação da informação (oral, escrita, outros).

O que transforma a solução de um problema em um conteúdo procedimental é que este consiste em *saber fazer algo e não só dizê-lo ou compreendê-lo*. Ao passo que, existem duas formas de conhecer o mundo: através do conhecimento declarativo (saber o quê; é fácil verbalizar) e do conhecimento procedimental (saber como; é difícil verbalizar). O procedimento automatiza o conhecimento. A natureza dos procedimentos pode ser de modo intencional e deliberado (POZO, 1998).

Pozo (1998) elege pressupostos básicos que os especialistas possuem para solucionar problemas. São estes: a habilidade e estratégias de solução de problemas são específicos; maior eficiência; maior rapidez; efeito da prática; depende da disponibilidade e conceitos adequados e diferentes maneiras de enfrentar o problema. Assim, os especialistas são mais rápidos ao resolverem problemas específicos de sua área; cometem menos erros; usam estratégias diferentes; reconhecem com mais facilidades os problemas; executam o plano de ação com rapidez e eficiência; costumam trazer os passos 2 e 3 (conceber e execução do plano), dentre outros.

4.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO OFICIAL E NA SALA DE AULA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, editados na década de 1990 (BRASIL, 1997; 1998) continuam norteando o Ensino Fundamental no Brasil, embora muitos de seus preceitos ainda estejam distantes da realidade de nossas salas de aula. Dentre eles, destacamos o uso sistemático e adequado de metodologias de ensino, como sendo alternativas ao ensino tradicional. Nos PCN específicos para Matemática no Ensino Fundamental, indica-se que a resolução de problemas deve ser vista como ponto de partida para o processo ensino-aprendizagem da disciplina.

O documento ressalta ainda o cuidado que o professor deve ter diante da possibilidade de interpretar equivocadamente certas práticas pedagógicas, o que pode levá-lo a distorções como, por exemplo, a utilização da resolução de problemas de forma isolada, a partir de listas de problemas, cuja solução dependa basicamente da escolha de técnicas, fórmulas ou procedimentos memorizados pelos alunos.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacional (BRASIL, 2006; 2012), na parte que trata especificamente dos conhecimentos matemáticos, ressalta-se a importância de colocar o aluno como ator principal do processo educacional e a defesa de que a aprendizagem de um novo conceito pode acontecer por meio da apresentação de situações-problema. Ao discutir sobre os diferentes propósitos da formação matemática na Educação Básica, o documento afirma que "[...] ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano" (BRASIL, 2006, 14).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a Resolução de Problemas deve ser vista como um eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, que pode ser resumido nos seguintes princípios:

> [...] uma situação problema deve ser o ponto de partida da atividade matemática e não as definições e exemplos. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p.39)

Entretanto, seja na época da edição nos PCN ou na atualidade, verificamos que a abordagem utilizada nas instituições escolares é bem diferente dos propostos nas metodologias de ensino, quer sejam oficiais e/ou alternativas. A Resolução de Problemas não desempenha o seu verdadeiro papel como metodologia para o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois para um grande número de alunos, resolver problemas significa apenas trabalhar com problemas contextualizados, diversificados de um determinado conteúdo que acabou de ser exposto pelo seu professor; ou ainda a aplicação direta de algoritmos correspondentes.

É preciso ressaltar na resolução de problemas em sala de aula, a importância do desafio, da necessidade de verificar possibilidades e validar processos de solução, e não apenas desenvolvê-la como uma atividade que visa determinar um resultado, após a aplicação direta de definições e técnicas.

Um dos principais objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor do que apresentar situações que o envolvam, o desafiem, e o motivem a querer resolvê-las (DANTE, 2000). Segundo o autor, a primeira questão a ser levantada é: em que momento o professor deve utilizar a resolução de problemas? Apenas após discutir determinado conteúdo, em aplicações diretas ou como meio de levar a discussão determinados temas matemáticos que serão utilizados para a construção de novos conceitos?

Tradicionalmente, os problemas são propostos após a apresentação dos conteúdos matemáticos, na parte final de um capítulo, por exemplo, com o objetivo de evidenciar em que situações o conteúdo pode ser aplicado ou ainda para verificar se os alunos compreenderam e sabem utilizar procedimentos estudados. Apesar dessa não ser a melhor forma de utilizar a resolução de problemas, é preciso reconhecer que essa é uma abordagem ainda predominante tanto nos livros didáticos hoje editados quanto na prática dos professores.

Atualmente, o que vem sendo indicado por educadores matemáticos (PONTE, 2005; LORENZATO, 2006; VAN DE WALLE, 2009; RODRIGUES VAZ, 2013; dentre outros), é a utilização da Resolução de Problemas como introdução ao estudo de diversos temas. Deste modo, por meio de problemas os alunos explorariam elementos matemáticos que serviriam para construir os conceitos e definições a serem estudados.

Dante (2000) estabeleceu algumas condutas para os professores ao usarem a Resolução de Problemas nas tarefas escolares: a. Propor tarefas abertas; b. Modificar o formato das tarefas; c. Diversificar contextos das tarefas; d. Mostrar cenários significativos; e. Adequar a definição do problema; f. Usar problemas com fins diversos; g. Habituar o aluno a decidir (autonomia); h. Estimular a cooperação entre alunos; i. Fornecer informações precisas; j. Avaliar mais que corrigir; l. Avaliar o planejamento prévio e todo o processo; e m. Avaliar a rapidez com que são obtidas as soluções.

Ao usar a abordagem da Resolução de Problemas em sala de aula, o professor assume a responsabilidade ou toma a decisão em várias fases do processo, inicialmente. Depois, este começa a ceder o controle, proporcionando autonomia aos alunos, de forma progressiva. Dante (2000) sugere que, ao utilizar a Resolução de Problemas, o professor comece propondo problemas fáceis aos alunos, de tal modo que todos resolvam e, sucessivamente, estes problemas se tornem mais complexos. Esse procedimento ajuda a desenvolver atitudes positivas nos estudantes. Sugere ainda apresentar alguns problemas de impacto que envolva o estudante, motivando-o, levando-o a pensar e a querer resolvê-los.

O professor precisa entender que nenhuma metodologia, sozinha, atende a todas as especificidades de um conteúdo matemático e, no caso da Resolução de Problemas, esta não pode compreender uma atividade isolada, devendo fazer parte da prática de modo contínuo e ativo ao longo do ano letivo. Outro aspecto importante é entender que o domínio de um conteúdo não habilita automaticamente o estudante a resolver problemas que envolvem o que estudou, por outro lado, ninguém nasce sabendo resolver problemas matemáticos nem se aprende a resolver problemas de repente. Esse processo é lento e exige planejamento e tempo, além disso, é preciso que o aluno entenda o valor de enfrentar desafios, que exigem esforço e dedicação, mesmo que não os solucionem corretamente.

Os processos envolvidos na resolução de um problema podem proporcionar aprendizado e, no lugar de propor longas listas de problemas que aborrecem os estudantes e corroboram para uma memorização sem significado, é mais recomendável trabalhar com poucos problemas, com mais frequência, estimulando a produção de estratégias diversificadas.

Nessa perspectiva Rêgo e Paiva (2009), sugerem que o professor forme um banco de problemas na escola, o qual denomina de *problemoteca.* As autoras indicam que o docente solicite que os alunos tragam problemas curiosos e interessantes para discutirem em sala de aula. É interessante também fornecer aos estudantes informações e dados (de jornais, revistas) para que eles criem problemas ou propor problemas em que faltem dados (ou com excesso de dados), solicitando aos alunos que coloquem os valores ou informações necessárias e que os resolvam.

A Resolução de Problemas é a principal metodologia de ensino indicada para o ensino de Matemática em todos os anos de escolaridade do Ensino Básico, segundo os documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1997; 1998; 2000; PARAIBA, 2010), assim como se destaca nos *Princípios e Padrões* norte-americanos do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (VAN DE WALLE, 2009). Um problema é entendido aqui como uma situação, tarefa, atividade ou questão para a qual o estudante não disponha de uma regra ou meio previamente conhecido para determinação de sua solução.

Van de Walle (2009, p. 57-58) afirma que o professor deve considerar, ao propor a Resolução de Problemas em sala de aula, os seguintes pontos: o problema deve começar de onde os alunos estão; o problema deve ser envolvente e estar relacionado à Matemática que se deseja que os alunos aprendam; e, por último, que a aprendizagem matemática se dê com base em justificativas plausíveis para as respostas encontradas. Assim, a Resolução de Problemas pode ser o veículo para desenvolver os conteúdos didáticos em um processo que gere aprendizagem.

Ao utilizarmos a Resolução de Problemas no ensino de Matemática, alguns elementos podem ser favorecidos: a concentração e atenção do estudante; a atribuição de sentido aos conteúdos didáticos; o desenvolvimento de uma convicção no estudante de que ele é capaz de fazer Matemática; o estímulo à tomada de decisões; a identificação de fragilidades cognitivas no estudante e o desenvolvimento de seu potencial matemático, dentre outros (VAN DE WALLE, 2009). A proposta de Van de Walle, para que seja rompido o ciclo tradicional de trabalho com conteúdos matemáticos (definições, exemplos e problemas de aplicação) baseia-se na utilização da Resolução de Problemas em sala de aula, planejando-se cuidadosamente suas três fases: o antes, o durante e o depois.

A fase que acontece *antes* da aplicação da metodologia Resolução de Problemas, remete-nos a três objetivos distintos, de acordo com Van de Walle (2009): verificar se todos os alunos compreenderam o problema proposto, evitando a sua explicação individual; ativar os conhecimentos prévios dos estudantes; e estabelecer orientações claras para que os estudantes saibam o que devem fazer. O professor, nessa fase, seleciona a motivação adequada à tarefa proposta, por exemplo, iniciando o trabalho com um conteúdo por sua história ou um experimento, e certificando-se de que todos entenderam o que se pretende fazer, antes do início do trabalho.

O estabelecimento das expectativas de aprendizagem, deve se basear nas respostas a duas questões: como os estudantes serão organizados para trabalhar e qual o produto desejado. Ao responde-las o professor orientará o trabalho dos estudantes no trabalho em grupo ou individualmente, priorizando o trabalho em grupo, com o objetivo de estimular a discussão sobre os procedimentos adotados na resolução da questão proposta. O modelo sugerido por Van de Walle (2009, p. 63) neste momento é "[...] de pensar e escrever, conversar em duplas e compartilhar". É preciso que fique claro para os estudantes que mais importante do que a solução do problema é termos consciência do processo de investigação e argumentação que nos conduziu até ela.

Ainda na etapa *antes* da Resolução de Problemas, é sugerida a preparação dos alunos para a realização da tarefa, propondo-se situações iniciais menos complexas, para que o estudante ative seus conhecimentos prévios e disponha das condições necessárias e suficientes para a resolução da questão. Neste momento, trabalhar com estimativas e com o cálculo mental é interessante, estimulando que o estudante explique como pensou.

A fase *durante* a aplicação da Resolução de Problema é constituída de quatro etapas distintas: inicialmente é dado um tempo aos alunos para que eles possam elaborar hipóteses e levantar conjecturas, participando ativamente da construção de seu próprio conhecimento; as orientações adequadas à condução da tarefa são fornecidas; os estudantes são ouvidos e, por fim, os alunos são avaliados.

Nessa fase, as orientações centrais para o professor, são: evitar antecipar informações ou resolver o problema; escutar todos os alunos; oferecer sugestões adequadas e dispor de tarefas que possam ser realizadas pelos alunos que resolverem os problemas propostos antes dos demais. É fundamental estimular que os estudantes testem hipóteses, usem estratégias diversas, e expressem o que sabem, o que pensam e como estão abordando a tarefa.

Na última fase da Resolução de Problemas em sala de aula, a do *depois,* o professor deve atentar para objetivos distintos da tarefa: encorajar os alunos a formarem uma comunidade de aprendizagem; escutar e/ou aceitar sugestões dos estudantes sem julgá-los e, por fim, sintetizar as principais ideias e identificar futuros problemas (VAN DE WALLE, 2009).

O professor deve atentar para o planejamento de tarefas que priorizem a Resolução de Problemas, caracterizadas por sua potencialidade para ajudar os alunos a entenderem o conteúdo em pauta. Neste momento, pode utilizar o livro didático como ferramenta ou adaptar tarefas de outras fontes, valorizando-se os registros escritos dos alunos e permitindo que os estudantes conversem ao resolverem as questões.

Finalmente, devemos incentivar que os alunos façam desenhos; simulações; usem modelos; procurem padrões; construam tabelas ou quadros; experimentem formas mais simples do problema; verifiquem se os resultados obtidos estão de acordo com a proposta inicial do problema; façam listas organizadas de passos. O aluno precisa estar atento a todas as etapas da resolução do problema.

4.3 TAREFAS DIDÁTICAS ENVOLVENDO O ENSINO DE TRIÂNGULOS

Em relação ao trabalho com triângulos, Van de Walle (2009) propõe que sejam realizadas quatro tarefas em pequenos grupos, sendo aqui destacadas adequadas a turmas de 9º Ano do Ensino Fundamental.

Tarefa 1: Determinar a área de um triângulo. Iniciamos a tarefa propondo a leitura e a identificação do que seja o problema e suas características a partir do que é apresentado no Quadro 01.

Quadro 01: Determinar a área de um triângulo

Missão: Encontrar um modo fácil para determinar a área de qualquer triângulo.

Certifique-se de que você compreende as respostas para cada uma destas perguntas:

1. O que significa área?
2. O que é um triângulo?
3. Como você encontra a área de outros polígonos? Apresente tantas maneias diferentes quantas você puder.

Agora veja se seu grupo consegue encontrar um nodo fácil para determinar a área de qualquer triângulo.

Sugestões:

1. Desenhe vários triângulos em papel pontilhado ou quadriculado e encontre a área. Procure padrões.
2. Reflita como você encontrou a área de outros polígonos. Existe alguma ideia-chave semelhante?
3. Você poderia tentar recortar triângulos e compor as peças.
4. Se você descobrir um modo para determinar a área, tenha certeza de que ele é o modo mais fácil de conseguir fazer isso e que ele funciona para qualquer triângulo.

Relatório:

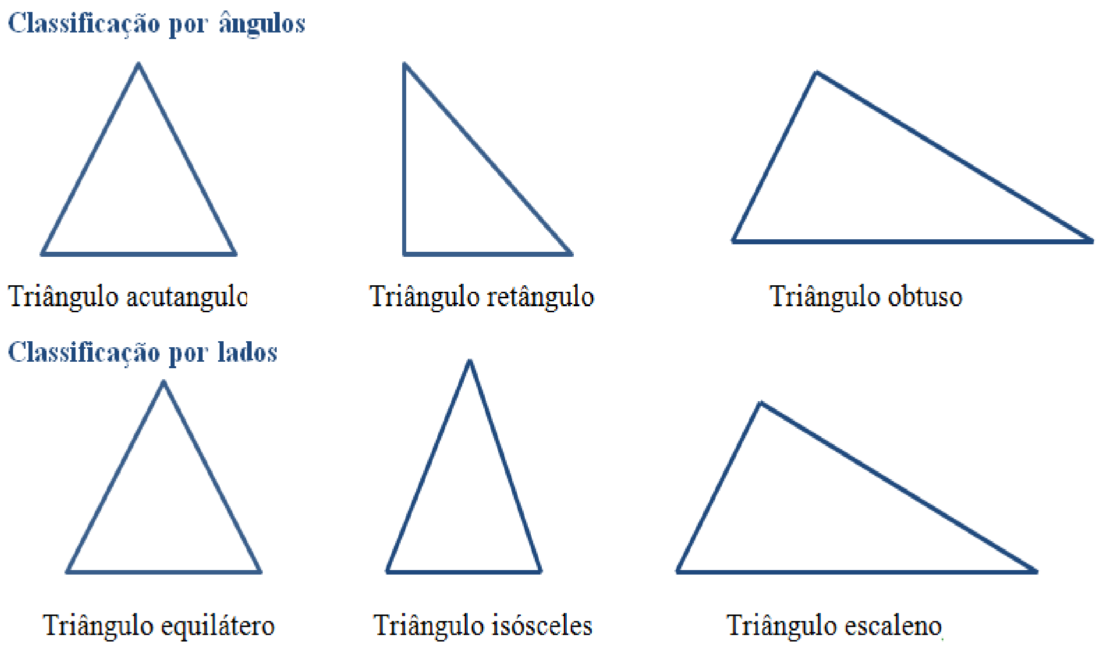
1. Explique suas respostas com detalhes às primeiras três perguntas. Conte como o seu grupo chegou a um consenso sobre as respostas.
2. Conte o que você fez para chegar à fórmula para a área de qualquer triangulo. Você usou alguma das sugestões? Como elas lhes ajudaram?
3. Mostre sua fórmula e dê um exemplo de como ela funciona.

Fonte: Adaptado de Van de Walle (2009, p. 61)

Em seguida continuamos a discussão agora propondo a análise da classificação de triângulos apresentada a seguir, segundo texto adaptado de Van de Wallle (2009, p. 71).

Tarefa 2: Classificação de triângulos quaisquer. Iniciamos fazendo a seguinte pergunta aos estudantes: Como você pode desenhar e classificar triângulos? Explicar aos estudantes que os triângulos podem ser classificados pela medida de seus ângulos ou de seus lados e apresentar as classificações conforme Figura 15.

Figura 15: Tipos de Triângulos segundo sua classificação



Fonte: Van de Walle (2009, p.71)

Ao apresentar cada figura, o professor deve associar as representações dos triângulos as suas características essenciais para sua classificação: **Triângulo Acutângulo**: é o triangulo que possui os três ângulos internos agudos (ângulo menor que 90º); **Triângulo Retângulo**: é o triângulo que possui um ângulo interno reto (ângulo igual a 90º); **Triângulo Obtuso**: é o triângulo que possui um ângulo interno obtuso (ângulo maior que 90º); **Triângulo equilátero**: é o triângulo que possui três lados com suas medidas iguais; **Triângulo Isósceles**: é o triângulo que possui dois de seus lados com medidas iguais; **Triângulo Escaleno:** é o triângulo que possui os seus três lados com medidas diferentes entre si.

Tarefa 3: Ao apresentar e discutir sua classificação, o professor segue propondo que os estudantes construam triângulos numa folha de papel que possua lados de cinco centímetros entre ângulos de 40º e 50º, como indicam as orientações a seguir:

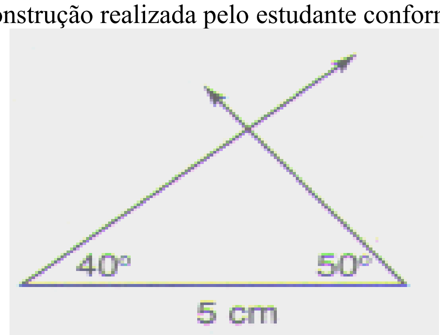
a) Desenhe um segmento de reta de 5 cm;

b) Desenhe um ângulo de 40º em uma extremidade do segmento e um de 50º na outra extremidade. Estenda os lados até que eles se encontrem.

c) Classifique o triângulo por seus ângulos internos e por seus lados. Você pode usar seu transferidor e régua para conferir as medidas (Figura 16).

d) Desenhe e rotule um exemplo preciso para cada tipo de triângulo já definido.

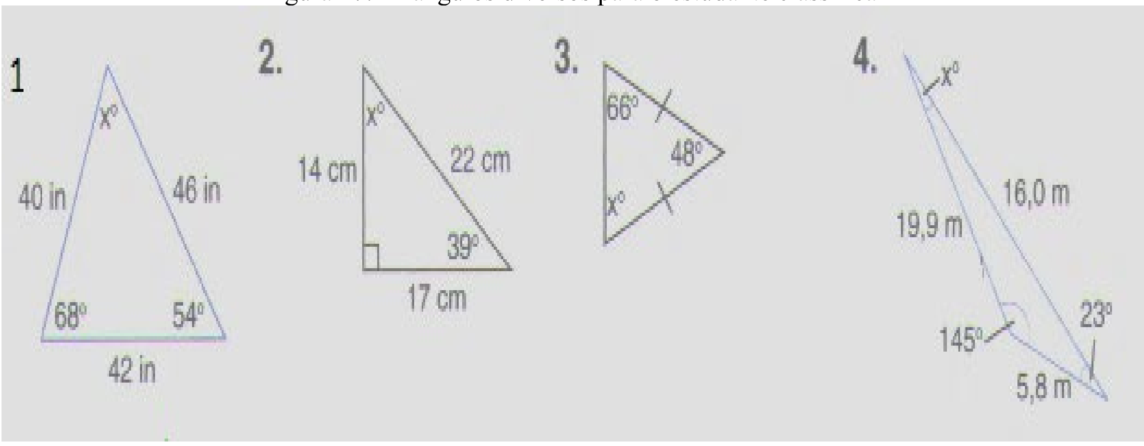
Figura 16: Construção realizada pelo estudante conforme orientações



Fonte: Van de Walle (2009, p. 71)

Tarefa 4: A seguir são propostas representações diversificadas apresentando várias classificações dos triângulos. É solicitado ao estudante que encontre as medidas dos ângulos ausentes nas representações abaixo e depois realize a sua devida classificação quanto aos seus lados e ângulos (Figura 17).

Figura 17: Triângulos diversos para o estudante classificar

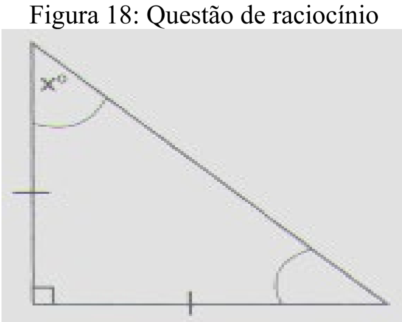


Fonte: Van de Walle (2009, p. 71)

1. Desenhe um triângulo com um lado de 6 centímetros entre dois ângulos de 40º. Então classifique o triângulo por seus ângulos internos e por seus lados.

2. **Raciocinando:** Encontre o valor de x no triângulo da Figura dada em seguida (Figura 18). Então classifique o triângulo por seus ângulos internos e por seus lados. É um polígono regular?

Figura 18: Questão de raciocínio



Fonte: Van de Walle (2009, p. 71)

Nas tarefas propostas aos estudantes que participaram de nossa investigação, procuramos levar em conta os elementos teóricos aqui explicitados, tanto em relação à proposta de trabalho com a Resolução de Problemas, como fonte de aprendizagem, quanto na estruturação das fases de execução ou na forma como as questões foram elaboradas.

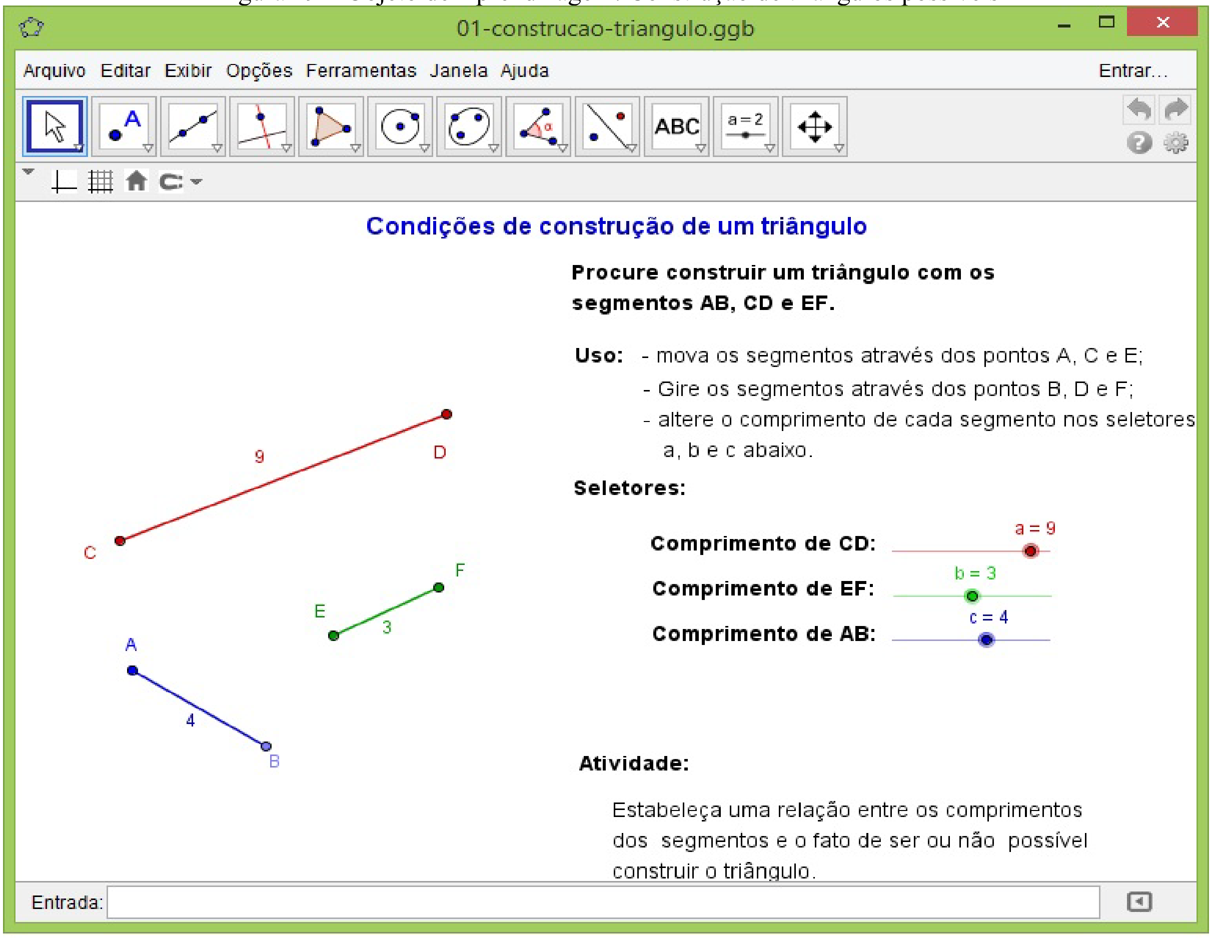
5 AS TAREFAS NA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA: OS TRIÂNGULOS

Apresentamos e discutiremos no presente Capítulo como foram desenvolvidas as tarefas que foram elaboradas para a pesquisa, priorizando as etapas de elementos adotados com a aproximação da Teoria da Atividade e a Resolução de Problemas no ensino de Matemática.

5.1 AS TAREFAS UTILIZADAS NA DISCUSSÃO DE TRIÂNGULOS

As tarefas adotadas neste estudo foram oriundas de três fontes: construções de objetos de aprendizagem – AO, elaboradas pelos pesquisadores, tendo como suporte o software GeoGeobra; de pesquisas realizadas em livros didáticos adotados no Ensino Básico brasileiro que constituem situações problemas de matemática; e de tarefas contidas nos exames de larga escala.

Figura 19 – Objeto de Aprendizagem: Construção de triângulos possíveis



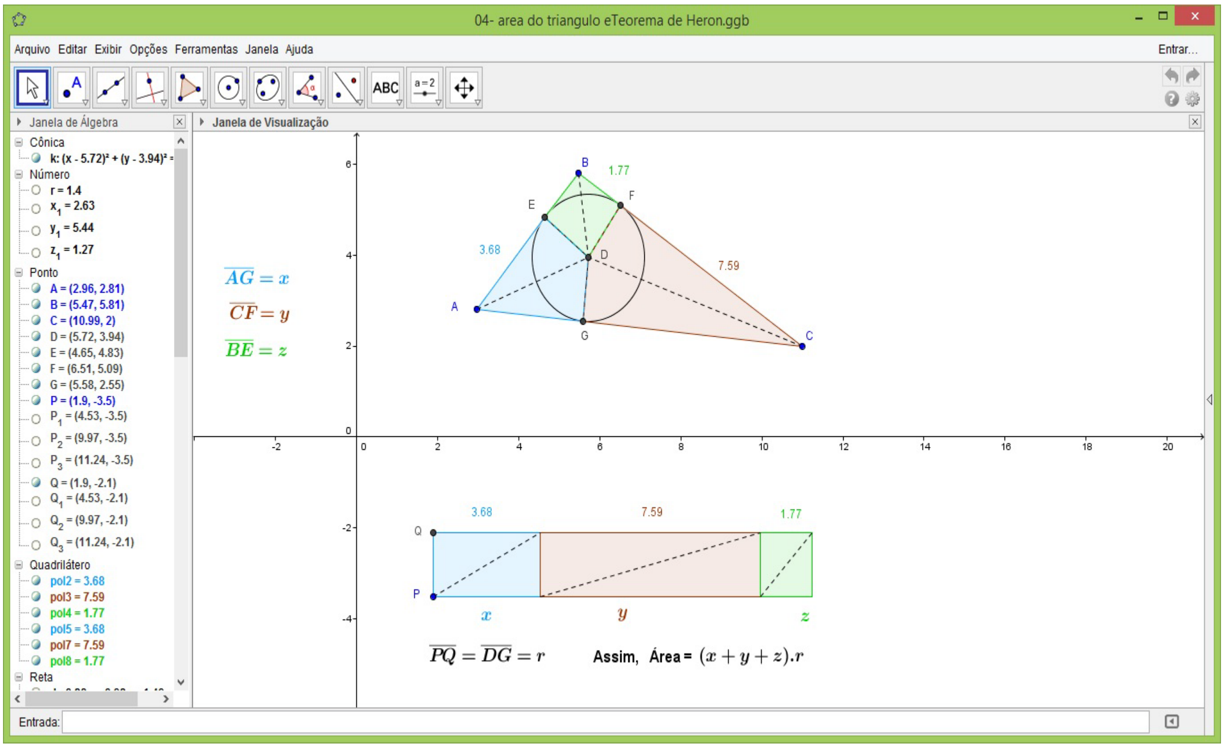
Fonte: Construção da pesquisadora

Os objetos de aprendizagem foram inicialmente pensados para motivar os alunos. E depois, utilizados pelos participantes na (re-)construção de conceitos e de ações e de conceitos envolvendo o conteúdo triângulo. Abordando este último item, elaboramos alguns OA como apresentados na Figura 19, onde o estudante é convidado a verificar, de forma empírica, em tempo real, a possibilidade (ou não) da construção de triângulos quaisquer a partir dos comprimentos de seus seguimentos.

A atividade exposta na Figura 19 permite que o estudante teste vários comprimentos de segmentos na formulação da representação triangular, bastando para isso mover os botões de controle deslizantes que foram apresentados na figura com três cores diferentes para representação dos comprimentos dos lados. Surge-nos uma pergunta: *Será que é possível, a partir de qualquer comprimento de segmento, formar triângulos?* A resposta é não.

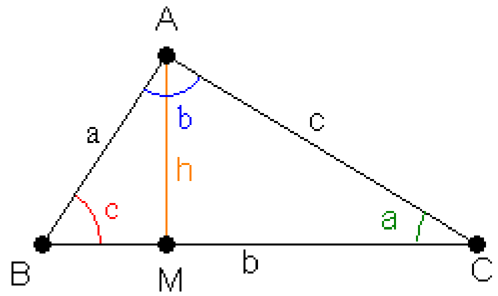
Os triângulos seguem a lei de formação que obedecem ao Teorema da Desigualdade Triangular onde se afirma que só é possível termos uma representação triangular quando o somatório de duas medidas dos lados do triângulo é maior que seu terceiro lado, ou seja, cada lado do triângulo deve ser menor que a soma dos outros dois lados. Logo, o triângulo de lados a, b e c, tem-se a<b+c, b<a+c e c<a+b, em qualquer representação.

Outro objeto de aprendizagem construído para a pesquisa foi o apresentado na Figura 20, com a demonstração de outro teorema muito importante na discussão dos triângulos: o Teorema de Heron.



Fonte: Construção da pesquisadora

A demonstração empírica do Teorema de Heron é apresentada ao estudante permitindo–lhes a construção de diversas representações, em tempo real, e visualizando através da janela da álgebra suas medidas de área, de comprimento de seus segmentos, bem como de seu perímetro. O estudante é convidado a alterar os vértices do triângulo realizando a verificação da validade da área do Teorema citado. Este OA foi utilizado na etapa Materializada segundo a aproximação que realizamos da Teoria da Atividade, descritas em discussões anteriores. Desta forma, o estudante pode vislumbrar a demonstração geométrica do Teorema de Heron conforme apresentada na Figura 21 tendo como base um triângulo qualquer.



Fonte: Construção da pesquisadora

A fórmula do Teorema de Heron pode ser desenvolvida a partir do semiperímetro *p* do triângulo ABC, cujas medidas foram apresentadas na Figura 21: $p = \frac{a+b+c}{2}$. A sua demonstração pode ser obtida através da lei dos cossenos onde chegamos ao resultado da área total de qualquer triângulo, independente de seus ângulos internos e/ou de seus comprimentos: A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Fórmula do Teorema de Heron

Com relação às tarefas utilizadas dos livros didáticos que serviram de subsídios para nosso estudo, estas foram selecionadas com base em situações-problema de matemática pouco usual para os estudantes do Ensino Básico. Escolhemos duas coleções: A *Coleção Para Viver Juntos: matemática*, do 6º ao 9º do Ensino Fundamental, dos autores Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita e Marco Antônio M. Fernandes (OLIVEIRA, FUGITA, FERNANDES, 2011) e a *Coleção Contexto e Aplicações do Ensino Médio* de Luiz Roberto Dante. As Coleções foram selecionadas como fonte de referência para aplicarmos com os estudantes do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática a Distância realizada em 2014, pelo fato de apresentarem possibilidades diversificadas da aplicação da Resolução de Problemas, estando estas coerentes com os elementos que adotamos a partir de aproximações da Teoria da Atividade.

Ao analisarmos a *Coleção Para Viver Juntos de matemática do 6º ao 9º anos* percebemos que esta não esteve presente no Guia do Programa Nacional do Livro Didático

(PNLD) dos anos de 2011 e 2014, e, portanto, não pode ser adotado em escolas públicas até esta data, mas é utilizado em escolas da rede privada de ensino de nossa cidade, em especial pelo fato de os demais títulos da mesma editora, voltados para as outras disciplinas, estarem presentes nos Guias do PNLD específicos, sendo a única exceção o campo da Matemática.

No momento da formação havíamos realizado a avaliação da Coleção, levando em consideração as quatro grandes áreas da Matemática (BRASIL, 1998) e, ao iniciarmos nossa pesquisa, analisamos os volumes separadamente, com destaque aos conteúdos relacionados ao ensino de Triângulos.

A Coleção abrange, nos volumes do 6º, 7º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental, as quatro áreas indicadas nos documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 1998, 2010): Números e Operações; Grandezas e Medidas; Espaço e Forma; e Tratamento da Informação e está elaborada de acordo com as novas normas da ortografia. Faremos, inicialmente, uma explanação geral acerca das características da coleção, atendo-nos, posteriormente, aos elementos do conteúdo que selecionamos para nosso estudo.

São utilizadas imagens do cotidiano para iniciar os Capítulos de cada volume, conectando a Matemática ao dia a dia (no esporte; na cultura; em objetos do cotidiano; em atividades diárias; dentre outros). Todos os volumes apresentam propostas metodológicas diversificadas para o desenvolvimento dos conteúdos, como a resolução de problemas, o uso de jogos, da História da Matemática e a elaboração de projetos.

Os autores propõem o trabalho com estimativas e cálculo mental e discutem o papel do erro no ensino. Propõem, ainda, a utilização de tecnologias, como calculadora (nos volumes do 6º e 7º Anos), computadores e *ipad* e o trabalho com materiais concretos, além de construções utilizando régua, compasso, transferidor e esquadros em tópicos geométricos.

Em alguns momentos é promovida a interligação de diferentes áreas da Matemática como Álgebra, Geometria e Aritmética, e, ao final de cada Capitulo são apresentadas tarefas diversificadas, com um nível mais alto de complexidade, em relação às propostas no decorrer do texto, sendo as questões baseadas nas Olimpíadas de Matemática e outros concursos/avaliações nacionais.

Nos livros sugere-se, pelo menos uma vez, visitas a páginas de *sites* de diversas instituições educacionais para realização de tarefas diversificadas de matemáticas, mas os autores não fazem menção ao uso de *softwares* gratuitos nas instituições escolares (uso do Excel da Microsoft, por exemplo), ou da necessidade de termos a permissão de uso de *software* privados.

A apresentação de alguns conteúdos segue a sequência tradicional, partindo-se da definição, a explanação de exemplos e a proposição de exercícios/problemas ao final da exposição do conteúdo. Essa perspectiva vai de encontro à proposta da Teoria da Atividade, mas como nossa pesquisa considerou aproximações à Teoria, as atividades propostas apresentam, ainda, limitações em relação à autonomia e criatividade.

Constatamos a presença de um erro conceitual na página 96 do volume do 6º Ano, quando o termo “polígonos” é usado de maneira equivocada, quando o correto seria “poliedros”. Também constatamos um erro de impressão, pois não existe a página 264 no livro do 7º Ano do volume avaliado. Os dois problemas foram discutidos com os professores que participaram da atividade de formação, podendo ser o primeiro considerado um elemento de reprovação, nos casos em que uma coleção é inscrita no Edital do PNLD, embora não saibamos se foi esse o caso. Na oportunidade fizemos contato com a Editora e apontamos o problema, entendendo que, no geral, a coleção tem uma estrutura razoável.

Destaca-se na Coleção, por exemplo, o estímulo à discussão sobre questões atuais que envolvem Matemática, o que estimula o estudante a organizar seus pensamentos, formar uma cadeia lógica de argumentação e, por fim, registrar suas conclusões na linguagem oral ou escrita, postura que deve ser cada vez mais incentivada no ambiente escolar.

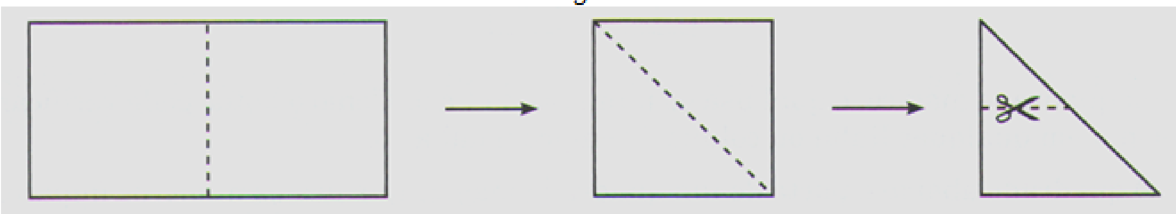
A outra coleção utilizada foi a *Coleção Contexto e Aplicações do Ensino Médio.* Ao analisarmos esta *Coleção constatamos que esta é adotada* no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e, portanto, é adotado em muitas escolas públicas e particulares de nossa cidade, desde o final da década de 1990. Priorizamos nesta coleção as tarefas que utilizam a área de triângulos a partir da análise de seus pontos, sendo necessária desenvolver uma matriz 3x3.

Também utilizamos questões apresentadas nos exames em larga como foi o caso das Olimpíadas de Matemática – OBMEP (BRASIL, 2006; 2013) para o 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Como exemplo dessa proposta, apresentamos uma situação-problema na Figura 22 que possibilita a obtenção da área da região triangular do problema através da experimentação do estudante, utilizando dobraduras em uma folha retangular. Ao final, o estudante é convidado a refletir sobre alguns aspectos comparativos com relação a área triangular.

Figura 22 – Questão das Olimpíadas de Matemática

1 Uma folha de papel é retangular, com base igual a 20 cm e altura 10 cm. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura 1, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.

Figura 1



a) Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?
b) Qual a área da parte maior?
c) Qual a área da parte menor?

Fonte: OBMEP (BRASIL, 2006, p. 16)

Entendemos que questões dessa natureza representam avanços quanto à natureza das atividades que podem ser propostas ao estudante, devendo ser associadas a atividades mais tradicionais, comuns nos livros didáticos adotados por nossos professores da Educação Básica.

5.2 A DISTRIBUIÇÃO DO CONTEÚDO TRIÂNGULO NOS LIVROS DIDÁTICOS INVESTIGADOS

De acordo com documentos oficiais que norteiam a Educação brasileira, a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e das Orientações Curriculares Nacionais (OCN) (BRASIL, 1997; 1998; 2000), o ensino de Matemática deve contribuir para desenvolver a plena potencialidade das capacidades dos alunos no período de sua escolarização, entendendo por capacidade as condições que o indivíduo possui para realizar um determinado fim. O termo pode ser usado, de forma similar, no sentido de habilidade.

As capacidades que devem ser desenvolvidas no contexto escolar, são de natureza cognitiva, motora, afetiva, de inserção e atuação social. Dentre estas, as habilidades cognitivas podem ser classificadas em três grandes grupos na Matemática, com relação aos conteúdos de ensino: conteúdos conceituais, conteúdos procedimentais e conteúdos atitudinais (BRASIL, 1998).

Os conteúdos conceituais remetem ao que se deve saber/compreender. Já os conteúdos procedimentais remetem a como relacionar o conhecimento ao saber fazer. Por fim, os conteúdos atitudinais buscam desenvolver no indivíduo atitudes que permitam o estabelecimento de relacionar-se bem com o conhecimento, consigo mesmo e com o outro.

Todos eles devem ser abordados na disciplina de Matemática em todas as fases e Anos da Educação Básica, assim como nos demais componentes curriculares.

Em nosso estudo realizamos, com o objetivo de promovermos um foco vertical de análise, um recorte em um campo de conhecimento matemático, mais especificamente, na Geometria, e, neste, centrados em um conjunto de elementos relativos ao estudo de Triângulos. De acordo com os PCN (BRASIL, 1997; 1998), o estudo de conteúdos relativos a Triângulos deve ser trabalhado de maneira explícita desde os primeiros anos do Ensino Fundamental e continuar a ser desenvolvido e aprofundando durante o Ensino Médio.

Nessa perspectiva, analisamos os quatro volumes da *Coleção Para Viver Juntos: matemática* (OLIVEIRA, FUGITA, FERNANDES, 2011), atentando para as discussões que remetem ao conteúdo citado.

No livro do 6º Ano, a temática aparece pela primeira vez na discussão sobre área e perímetro de figuras planas e segue para as tarefas envolvendo composição e decomposição de área; uso de malha quadriculada em diversas atividades; Tangram; e mosaico.

No do 7º Ano, o conteúdo triângulo aparece nas discussões de: vela do barco; arranjos de palitos de fósforos (triângulos); lei de formação de equação; triângulos - conceituação; ângulos internos de um triângulo - experimento; construção de triângulos com régua, compasso transferidor e par de esquadros e cálculo de área de triângulos.

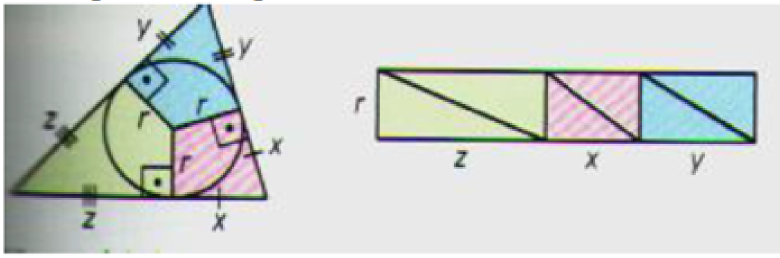
No livro do 8º Ano, o conteúdo triângulo está presente nos tópicos: condições de existência de triângulos; relação entre a medida de qualquer lado de um triângulo e a soma da medida dos outros dois lados; congruência entre triângulos; elementos de um triângulo: mediana; mediatriz; bissetriz; triângulos isósceles; construções com régua e compasso; pontos notáveis de um triângulo; medida dos lados de um triângulo retângulo e a área de quadrados (demonstração do teorema de Pitágoras); e, relações envolvendo medidas .

A demonstração do Teorema de Heron, já apresentado anteriormente, pode ser desenvolvida a partir da tarefa apresentada na Figura 23.

Figura 23 – Demonstração da área utilizando o Teorema de Heron

3 Vamos resolver um quebra-cabeça? Paulo fez a seguinte composição com algumas peças, mostrada na figura 02.

Figura 02: Triângulo circunscrito em uma circunferência



Use a ideia de Paulo para calcular a área de um triângulo que tem perímetro 16 cm e cujo raio da circunferência inscrita mede 3 cm. Como podemos determinar a área da nova figura? Explique.

Fonte: Adaptado do livro do 8º ano de Oliveira, Fugita e Fernandes (2011, p.217)

Também utilizamos com os estudantes o a mesma tarefa apresentada na Figura 23 construída no GeoGebra como proposta empírica, já apresentada na Figura 20.

Por fim, no livro do 9º Ano, o conteúdo é explorado nos tópicos: triângulo retângulo; relações métricas no triângulo retângulo - catetos, hipotenusa; teorema de Pitágoras – demonstração; aplicação; e trigonometria no triângulo.

Nos diversos tópicos em todos os volumes da Coleção, em que são explorados elementos relativos ao estudo de Triângulos, são propostas atividades, exercícios e problemas envolvendo procedimentos diversos, sendo alguns deles tomados como referência para algumas tarefas trabalhadas com os estudantes que participaram de nossa investigação.

Apesar dos problemas identificados na Coleção, entendemos que nenhum texto dirigido à sala de aula é perfeito ou completo, assim como, por melhor que sejam os livros didáticos adotados, o professor não pode tê-los como única fonte para o ensino, em qualquer nível de escolaridade. De qualquer modo, defendemos a importância de o professor ser capaz de avaliar os materiais didáticos de que faz uso, evitando a reprodução de erros conceituais ou fazendo as complementações que se fizerem necessárias.

Apesar do destaque no documento e da presença do conteúdo em todos os livros dedicados ao Ensino Fundamental analisados, o que acreditamos seja comum na maioria das coleções de livros didáticos de Matemática dirigidos a esse nível de escolaridade, ao tratarmos da temática geral Triângulos, em disciplinas de nível superior de ensino que ministramos, os estudantes consideram o conteúdo complexo e apresentam lacunas de compreensão, principalmente em relação ao domínio das diferentes representações deste conceito e sua aplicação. No ensino a distância também não é diferente.

A *Coleção Contextos e Aplicações* (DANTE, 2000) apresenta, de forma integrada, a discussão de todos os conteúdos de Matemática regular do Ensino Médio em um único volume. Neste o conteúdo triângulo é discutido em diversos capítulos: relações métricas no triângulo; polígonos regulares inscritos n circunferência e comprimento da circunferência; áreas de superfícies planas; trigonometria do triângulo retângulo; conceitos trigonométricos básicos; e resolução de triângulos quaisquer. Nos capítulos foram apresentadas diversas questões que versam sobre os conteúdos abordados, bem como a propostas de discussão de questões anteriores dos exames de avaliação de massa ENEM dos anos de 1998 e 1999; e questões dos principais vestibulares. Logo verificamos que esta Coleção é bem aceita em muitas instituições de ensino de nossa região, sendo bastante conhecida pelos profissionais de educação que atuam nos anos do Ensino Médio.

Assim, em termos curriculares, verificamos uma ampla discussão em todos os anos do Ensino Básico sendo um conhecimento necessário para novas discussões mais complexas na matemática. Quando o estudante conclui este nível de ensino, espera-se que este seja capaz de compreender as ideias básicas da matemática, e quando necessário, saiba aplica-las na resolução de problemas do mundo real.

Em estudos realizados nos últimos três anos pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância (UFPB, 2013), com base nas avaliações das disciplinas de Matemática iniciais, constatou-se que muitos alunos apresentaram dificuldades no estudo de Geometria. Essa área é amplamente explorada nas Disciplinas de Matemática para o Ensino Básico (MEB) I, II e III, com 60 horas/aula cada, oferecidas no primeiro e no segundo semestre letivo do Curso e também nas disciplinas aplicas ao Ensino, que serão denominadas de Laboratório de Ensino I, II e III, na nova estrutura curricular do Curso, recentemente discutida e aprovada e em fase de implantação.

6 O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Esta seção tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados na presente pesquisa, referentes ao tipo de estudo aplicado, os sujeitos envolvidos, e o método adotado segundo o objetivo e a análise dos dados.

6.1 A NATUREZA DE NOSSO ESTUDO

Em nossa investigação, de natureza qualitativa, adotamos uma perspectiva metodológica predominantemente exploratória, que é definida por Gil como tendo "[...] como principal finalidade esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. [...] Envolve levantamento bibliográfico e documental, entrevistas não padronizadas e estudo de caso". (GIL, 2011, p. 27).

Quanto ao levantamento e análise de dados, elegemos este estudo como sendo um estudo de caso. Este método, segundo Gil (2011), segue os estudos exploratórios, descritivos e interpretativos. Caracteriza-se por ser um estudo eclético que se aplica em diferentes áreas do conhecimento, sendo um estudo aprofundado que busca fundamentos e explicações para determinado fato ou fenômeno da realidade empírica. O autor afirma ainda que este método é abrangente e que permite chegar a generalizações amplas baseadas em evidencias e que facilitem a compreensão da realidade, sendo muito aplicado nas ciências humanas e sociais.

A partir desse arcabouço metodológico, nos respaldamos na obtenção de dados através de dois instrumentos de pesquisa: questionário semiestruturado e diário de campo. O questionário foi o instrumento preponderante de levantamento de informações nas etapas inicial e final do nosso estudo. Esse instrumento teve a finalidade de caracterizar o perfil dos estudantes e identificar os conhecimentos dos discentes iniciais na etapa de diagnóstico e no controle final.

O diário de campo, segundo Gil (2011), constitui-se um instrumento bastante usado nas pesquisas em que se deseja realizar observações. Este instrumento pode ser subdividido em: observações diretas ou participantes, bem como em notas de campo. As observações diretas são as estruturadas ou sistemáticas, planejadas para coleta e registro de dados que ocorrem, neste momento, *in loco,* e se baseiam em uma planilha organizada para registro dos dados da pesquisa. Já a observação participante trata-se do registro da estrutura e conteúdo de toda a realidade observada, enquanto as notas de campo são formadas pela junção das observações do pesquisador com as falas dos participantes.

Para atingir os objetivos da pesquisa, trabalhamos com uma turma de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba, de 5º período, acompanhando-os nos períodos 2014.1 e 2014.2. A pesquisa de campo ocorreu durante os meses de fevereiro a setembro de 2014, que correspondeu a todo o semestre de 2014.1, e início do semestre 2014.2, sendo realizadas, durante esse período, atividades diversas, inicialmente com 65 estudantes. Durante o período da pesquisa de campo foram aplicados 73 questões distribuídas em 23 tarefas, incluindo toda produção escrita (14); o levantamento do perfil da turma (1); a organização dos grupos (1); as oficinas temáticas (5); e, por último, a tarefa de aferição de controle (1) e a verificação da retenção (1).

Durante 14 semanas elaboramos, apresentamos, discutimos e executamos a pesquisa e na última semana de setembro realizamos a aferição de controle, avaliando a retenção do conceito triângulo nas tarefas executadas após um intervalo de tempo (dois meses). Neste último momento contamos que 34 estudantes estariam aptos a participação voluntária do estudo.

O curso de Licenciatura em Matemática a distância foi escolhido em função da tipicidade (turmas disciplinares favoráveis ao estudo: TEM II e TEM III) e por acessibilidade do estudo (pesquisadores atuam no curso desde sua implantação, ativamente). Quanto à metodologia de ação estruturamos o estudo em quatro etapas: criação, execução, controle final e verificação de retenção. Estas, por sua vez, se subdividem para contemplar a aproximação da Teoria investigada, apresentadas a seguir.

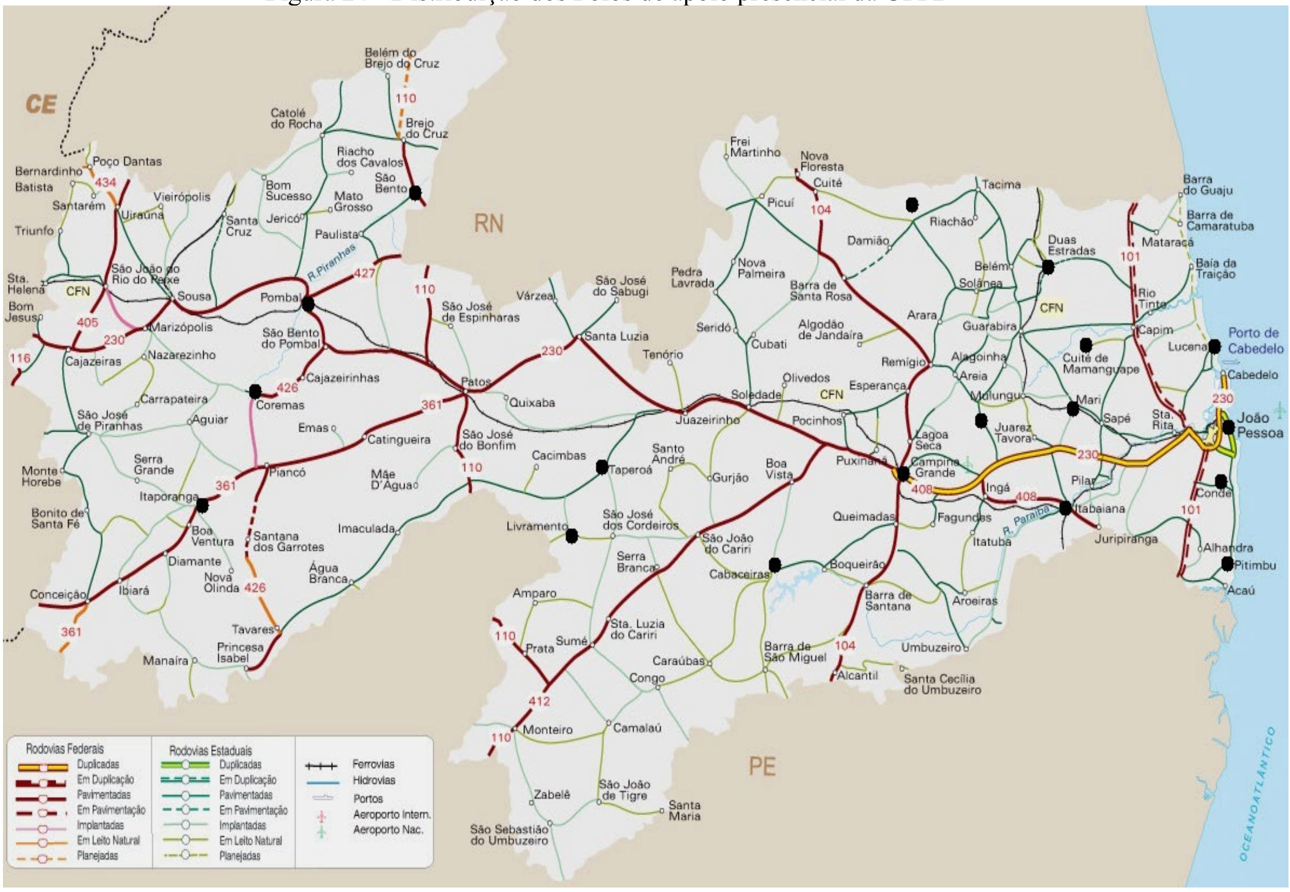
6.2 OS PARTICIPANTES E O LOCAL DO ESTUDO: A UFPB VIRTUAL E O PROJETO UAB

A UFPB Virtual foi criada com o objetivo de concorrer ao chamado do segundo edital da Universidade Aberta do Brasil (UAB) do Ministério da Educação (MEC), por meio da Secretaria da Educação à Distância (SEED) e iniciou suas atividades em outubro de 2007, na modalidade semipresencial. Com o objetivo de contribuir com a melhoria dos índices educacionais não só da Paraíba, mas também de outros estados do Nordeste, a UFPB Virtual ofereceu, inicialmente, três cursos de graduação: Licenciatura em Matemática; Licenciatura em Pedagogia e Licenciatura em Letras.

Em 2013 passaram a serem oferecidos dez (10) cursos na modalidade a distância pela UFPB Virtual: nove (09) em nível de graduação (Licenciaturas em: Matemática; Letras, com habilitação em Língua Portuguesa; Letras, com habilitação em Libras; Ciências da Computação; Pedagogia, com habilitação em Educação Infantil; Ciências Biológicas; Ciências Agrárias; Ciências Naturais; e Bacharelado em Administração Pública), e um curso em nível de pós-graduação: Especialização em Gestão Pública Municipal.

Ao serem concebidos pela UFPB, esses cursos incorporaram práticas sedimentadas nesta instituição de ensino e têm buscado proporcionar uma formação profissional específica à sua clientela. A abrangência atual dos cursos da instituição atinge vinte e oito (28) polos municipais distribuídos em cinco Estados da Federação: um polo no Ceará (Ubajara); dois polos em Pernambuco (Ipojuca e Limoeiro); seis polos na Bahia (Camaçari, Esplanada, Itapicuru, Jacaraci, Mundo Novo e Paratinga); um polo no Rio Grande do Norte (Parnamirim) e dezoito polos na Paraíba (Alagoa Grande, Araruna, Cabaceiras, Campina Grande, Conde, Coremas, Cuité de Mamanguape, Duas Estradas, Itabaiana, Itaporanga, João Pessoa, Livramento, Lucena, Marí, Pitimbu, Pombal, São Bento e Taperoá).

Figura 24- Distribuição dos Polos de apoio presencial da UFPB



Fonte: UFPB Virtual (2013).

Com uma extensão de 56.439,838 Km² de área e 223 municípios, a Paraíba possui uma distribuição de polos que atende estrategicamente a todo o estado, alcançando seus extremos, estando presentes nas quatro mesorregiões localizadas na Zona da Mata, Agreste, Borborema e Sertão Paraibano. (Figura 17).

Outro fato importante, que sinaliza a demanda e a carência de vagas nessa região, são os dados sobre os vestibulares da UFPB Virtual. A forma de ingresso aos cursos da UFPB Virtual, até 2013, foi por processos seletivos realizados em todos os anos, a partir de 2007. Segundo a Comissão Permanente do Concurso Vestibular (COPERVE), em 2007 foram oferecidas 1.668 vagas distribuídas para os cursos iniciais de Letras, Pedagogia e Matemática. Entre os 5.523 candidatos inscritos foram aprovados 1.560 candidatos e, posteriormente, foram abertas 109 vagas para reopção de curso (UFPB/Virtual, 2013).

No vestibular do ano seguinte, 2008, foram oferecidas 2.047 vagas contemplando três novos cursos. No total, já foram oferecidas 1088 vagas para o curso de Licenciatura em Matemática a distância nos três anos observados. A Tabela 03 contém os dados relativos às vagas ofertadas para o curso de Matemática nos anos de 2007, quando iniciou suas atividades; em 2007, e atualmente, no ano de 2013.

TABELA 03 - Distribuição de vagas para Licenciatura em Matemática a distância

Pólos/ Vagas	**2007**	**2013**
Araruna - PB	30	0
Campina Grande - PB	50	25
Conde - PB	40	25
Coremas - PB	0	25
Cuité de Mamanguape - PB	30	0
Duas Estradas - PB	40	0
Itabaiana - PB	50	0
Itaporanga -PB	50	25
João Pessoa - PB	50	25
Livramento - PB	0	25
Lucena - PB	30	25
Marí - PB	20	0
Pombal - PB	30	0
Pitimbu - PB	20	0
Taperoá - PB	0	25
Total: 1088	**464**	**200**

Fonte: UFPB/Virtual (2013)
Nota: Indicamos por 0 quando não houve vestibular

Ao analisarmos os dados constatamos que a oferta de vagas diminuiu com o avanço do curso. Este fato ocorreu pelo fato de alguns polos do estado da Paraíba não estarem aptos a receberem novos estudantes por falta de estrutura física e administrativa mínimas, avaliados pela MEC como requisitos essenciais para o funcionamento dos cursos.

A forma de ingresso da UFPB Virtual, a partir de 2014, foi realizada exclusivamente através do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM ou através de ingresso como graduado, por meio de edital público. Em 2013 o curso de Licenciatura em Matemática contava com um quadro de profissionais assim distribuídos: 43 professores ativos, distribuídos nas disciplinas dos oito períodos do curso; 65 tutores a distância; e 51 tutores presenciais. Quanto ao número de estudantes, o curso contava com 2.065 matriculados, sendo 815 alunos na condição de ativos, ou seja, matriculados e cursando; e 1.117 estudantes inativos, ou seja, que possuem vínculo institucional, mas sem matrícula efetiva no semestre considerado. Cento e trinta e três alunos já foram formados pelo curso (Tabela 04).

Em 2014 esse quadro sofreu poucas alterações. Agora contamos com 46 professores distribuídos em 42 disciplinas, que atendem a todas as necessidades do curso, tais como: planejamento, elaboração, execução e acompanhamento das disciplinas, construção dos Trabalhos de Conclusão de Curso – TCC, acompanhamento dos Estágios Obrigatórios nos polos de apoio, bem como visitas aos polos periodicamente para ministrar aulas presenciais de cada disciplina, esta última ação ocorre regulamente em dois momentos distintos em todos os semestres promovidos pelo Curso.

TABELA 04 – Situação dos estudantes nos cursos da UFPB Virtual no ano de 2013.

Cursos	Ativos	Inativos	Conclusão	Total de alunos	% Evasão
Administração Pública	98	0	0	98	0,00
Ciências Agrárias	1068	630	31	1729	36,44
Ciências Biológicas	609	405	13	1027	39,44
Ciências Naturais	470	329	47	846	38,89
Computação	379	8	0	387	2,07
Letras	1640	1146	425	3211	35,69
Letras/Libras	463	84	0	547	15, 336
Matemática	**815**	**1117**	**133**	**2065**	**54,09**
Pedagogia	1591	855	195	2641	32,37
Total	**7133**	**4574**	**844**	**12551**	**36,44**

Fonte: UFPB/Virtual (2013)

Ao comparamos o curso de Licenciatura em Matemática, na Tabela 04, com os demais cursos oferecidos pela UFPB Virtual, observa-se um índice de 54,09% dos estudantes evadidos, ou seja, mais da metade dos alunos que ingressam no Curso, não o concluem. Em alguns casos, a razão do abandono reside no fato de ser essa a única oportunidade de frequentar o nível superior para os jovens que moram nas regiões mais longínquas do Estado e não há, posteriormente, identificação do estudante com o Curso.

Em outros casos, estudantes que acumularam muitas deficiências na formação escolar, na Educação Básica, ou que estão retornando aos estudos depois de estarem anos afastados da sala de aula, têm dificuldade para acompanhar as disciplinas. Estes dois fatos influenciam expressivamente no índice de evasão observado.

Os dados da Tabela 05 mostram que o curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPB apresentou a maior taxa de evasão referente aos ingressantes nos anos de 2007 a 2012, variando de 54,8%, no ano de 2012, para 78,3%, no ano de 2009. Este fato tem sido observado nos cursos da área das Ciências Exatas da UFPB, que concentra a maior taxa de evasão nos cursos presenciais, atualmente, na instituição. Vale destacar que no ano de 2011 não foi realizada seleção para ingresso de novos alunos.

TABELA 05 - Alunos Ingressantes(Ing) e evadidos(Eva) nos cursos a distância da UFPB nos vestibulares realizados até 2013

Cursos	**2007**		**2008**		**2009**		**2010**		**2012**		**2013**	
	Ing	Eva	Ing	Eva	Ing	Eva	Ing	Eva	Ing	Eva	Ing	Eva
Administração Pública	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	98	32
Ciências Agrárias	-	-	367	211	446	246	520	242	204	60	192	9
Ciências Biológicas	-	-	55	38	225	160	321	213	265	130	122	2
Ciências Naturais	-	-	195	104	116	83	275	161	157	76	108	22
Computação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	388	56
Letras	669	358	612	318	563	277	569	282	384	126	425	55
Letras/Libras	-	-	-	-	90	32	171	57	103	22	189	20
Matemática	**416**	**259**	**419**	**312**	**314**	**246**	**419**	**270**	**303**	**166**	**206**	**36**
Pedagogia	480	259	392	190	471	232	448	248	505	161	354	22

Fonte: UFPB Virtual (2013)
Ing – alunos ingressantes no ano correspondente;
Eva- alunos evadidos no ano correspondente.
Nota: Não houve vestibular no ano de 2011.

Segundo dados da UFPB Virtual (2013), a evasão nos cursos ocorre, com maior índice, nos primeiros anos dos Cursos. Na Licenciatura em Matemática a Distância este fato fica muito evidente em todos os anos, de 2007 a 2013, ocorrendo sempre nos primeiros semestres letivos. Este fato está em concordância com estudos realizados no Brasil sobre evasão nos cursos realizados na modalidade a distância (UTIYAMA E BORBA, 2003; MAIA e MEIRELES, 2005; ABBAD, CARVALHO e ZERBINI, 2005), que apontam realidade semelhante em diferentes instituições de ensino superior no país.

Diante dos dados apresentados nas Tabelas 04 e 05, o que fazer para diminuir os altos índices de evasão nos primeiros períodos do Curso de Matemática a Distância, levando em consideração a realidade do nosso estado? Algumas medidas já estão sendo pensadas e desenvolvidas pelo grupo de Matemática da UFPB Virtual, como a reestruturação das unidades curriculares, reestruturação do material didático do estudante e a mudança de alguns recursos metodológicos de ensino.

Pensando nesse último ponto, desenvolvemos nossa pesquisa em busca de metodologias de ensino que possam contribuir para a melhoria do aprendizado matemático dos alunos do Curso, futuros professores de Matemática, e a diminuição do índice de evasão.

6.3 QUEM SÃO OS ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA DA UFPB?

Ao refletirmos sobre o acesso da população brasileira às instituições públicas que oferecem nível superior para jovens e adultos, que têm expectativas de melhoria de vida por meio da progressão de sua formação, alguns problemas sociais se destacam, como a falta de universidades em regiões afastadas das capitais, falta de renda da população para estudar nos grandes centros de ensino, dentre outros.

Na Paraíba convivemos com uma dura realidade, que tem se repetido nos últimos anos: cerca de 50.000 jovens provenientes do Ensino Básico, e muitos adultos, buscam uma vaga na maior e mais antiga instituição pública do Estado, a Universidade Federal da Paraíba, que ofereceu, no ano de 2013, um total de 5.281 vagas, o que exclui de suas salas de aula cerca de 44.000 pretendentes, aos quais se somarão a um percentual dos concluintes da Educação Básica do ano seguinte e que alimentam o mesmo sonho (UFPB, 2013).

O que ocorre em nosso país não é muito diferente do que também ocorre ou ocorreu em outros países, como a França. Pierre Bourdieu mostrou, através de estudos sociológicos, que, apesar dos sistemas de ensino na França anunciarem que o acesso ao nível superior é igual para todos, isso não ocorre devido ao capital cultural e capital social herdado, cumulativamente, no seio familiar dos estudantes (NOGUEIRA; CATANI, 1998).

O repasse e assimilação do capital cultural ocorre entre pessoas que, geralmente, são membros das classes sociais mais abastadas, em situação privilegiada em relação às classes mais desfavorecidas, situação essa determinante para entendermos as desigualdades que ocorrem em todo o sistema de ensino até o ingresso ao nível superior e, consequentemente, ao aceso às melhores vagas de trabalho. Estas desigualdades, por vezes, são justificadas pela falta de “dom” das pessoas ou de condições inatas da população.

Por meio da análise de seu percurso histórico, podemos melhorar nossa compreensão acerca do sistema educacional brasileiro. Florestan Fernandes, ainda na década de 1960, convidava a refletir sobre as mudanças e lutas que ocorreram, para que hoje pudéssemos ter escolas em todas as regiões do país, seguindo um padrão nacional e com acesso de quase 100% das crianças em idade escolar ao Ensino Fundamental.

Naquela década, possuíamos uma discrepância muito grande entre as principais regiões da federação, assim como também pouco acesso à escola pelas crianças, além de poucas unidades escolares, principalmente escolas primárias, sendo o Ensino Médio e Superior, privilégio de uma pequena parcela da sociedade (FERNANDES, 1966). A partir de um panorama geral e predominantemente quantitativo, podemos perceber que caminhamos muito em poucas décadas, mas devemos lembrar que ainda há muito que avançar qualitativamente e considerar que as mudanças que ocorrem na educação demandam tempo para proporcionar retorno à sociedade.

Vale ainda destacar que, embora hoje tenhamos uma cobertura praticamente universal no Ensino Fundamental, em todo o país, o mesmo não ocorre nos níveis de escolaridade seguintes. Parte dos jovens e adultos da Paraíba não cursa o Ensino Médio e a maioria não tem acesso às instituições públicas que ofertam nível superior, em razão das desigualdades culturais e históricas que sofremos durante o processo de desenvolvimento do país. Muitas medidas estão sendo oferecidas, hoje, para mudar esta realidade, mas parte delas funciona apenas como paliativo dos problemas do sistema regular de ensino, como é o caso da educação a distância (EaD) no país, para o Ensino Superior.

A EaD ainda não está plenamente regularizada nas instituições de Ensino Superior e funcionam, atualmente, no limite dos recursos das instituições que oferecem esta modalidade, entendendo-se que não basta apenas ampliar o número de vagas nas instituições públicas, e o acesso dos estudantes mais carentes. Precisamos pensar em como proporcionar condições para que esses estudantes permaneçam nos cursos.

A UFPB oferece, atualmente, três cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, nas modalidades presencial e semipresencial: o curso presencial do Campus IV, em Rio Tinto, com 100 vagas anualmente; o curso presencial do Campus I, em João Pessoa, com 100 vagas anualmente; e o curso a distância, semipresencial, com 200 vagas anuais.

As características da maioria dos jovens que procuram os três cursos de Licenciatura em Matemática da UFPB foram analisadas com base nos dados de 151 alunos, distribuídos em quatro turmas de primeiro período na disciplina de Cálculo I (Tabela 06): uma em Rio Tinto, duas em João Pessoa (noturno e diurno) e os alunos da EaD com representação de 12 polos de apoio presencial. O estudo identificou que a maioria dos nossos estudantes é do sexo masculino, com idades entre 18 a 25 anos, residindo nas cidades polo, oriundos de comunidades circunvizinhas. Possuem acesso a computadores e e-mail; consideram ter bom domínio em informática e trabalham em outras profissões que não incluem a educação. Tem, em sua maioria, um tempo de mais de três anos de conclusão do Ensino Médio, chegando a depoimentos de estudantes com até 25 anos fora de instituições de ensino.

Realizamos um levantamento do perfil da turma na disciplina de Tópicos Especiais em Matemática II – TEM II, no início do período de 2014.1, com um total de 67 estudantes (69%) de 97 matriculados na disciplina. (Tabela 06).

TABELA 06 – Perfil dos estudantes de TEM II do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPB – 2014

Perguntas	**Respostas**
Sexo?	62,6% masculino
Faixa etária	47,8% têm idade entre 20 a 30 anos
Estado civil?	61,2 % são casados
Renda familiar?	31,3% 1 a 2 salários mínimos
Localização?	85,5% residem na zona urbana
Qual sua Profissão?	65% estão desempregados ou nunca trabalharam
Você já é professor?	34,8% já atuam como professores em sua região
Por escolheu Licenciatura em matemática?	(73,5%) – identificação com a disciplina; 56,3%) flexibilidade de horário; 23,4% cursar uma graduação.

Fonte: Dados dos pesquisadores baseado em 67 questionários aplicados em agosto/2014

O perfil dos estudantes da turma não se diferencia muito do perfil dos estudantes do Curso presencial diurno da capital, quando ao fato de ser a maioria oriunda da escola pública e de famílias de baixa renda, ou ao gênero. Diferenças entre os dois grupos reside na faixa etária, uma vez que os estudantes do presencial diurno do Campus I estão, em sua maioria, abaixo de 18 anos; no estado civil, uma vez que esses jovens são, em geral, solteiros; e, no caso, da turma da EaD, um percentual relativamente grande de estudantes (34,8%) já atua como professor, o que não ocorre no curso presencial diurno de João Pessoa.

Diante dos dados aqui apresentados, observando-se a necessidade de formação de professores para a rede de ensino do Estado da Paraíba e diante do alto índice de evasão nas turmas iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática, nos propomos a realizar a presente pesquisa. Nossa defesa é que, com a sistematização planejada tendo como base uma aproximação da Teoria da Atividade proposta por Talizina (2000), aliada a aplicativos matemáticos, podemos potencializar a construção de conceitos matemáticos de nossos graduandos, melhorando sua formação.

Focamos nossa análise no ensino de Triângulos, pelas razões que apresentaremos adiante, de modo a proporcionar avanços qualitativos na aprendizagem dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática a distância. Embora tenhamos feito um recorte de conteúdo, entendemos que muitas das reflexões que trazemos podem ser feitas em relação a outros conceitos matemáticos igualmente importantes, com as devidas adaptações.

Defendemos ainda que, como educadores, precisamos nos propor questões e realizar reflexões e ações de modo que, por meio da melhoria da formação de nossos jovens possamos lhes proporcionar melhores condições sociais, culturais e econômicas. Uma destas ações seria a delimitação de metodologias de ensino que possibilitem uma aprendizagem de qualidade de nossos estudantes, em especial das escolas públicas, nas quais muitos alunos egressos dos cursos de Licenciatura atuarão como docentes.

6.4 ETAPAS DA PESQUISA

A pesquisa de campo foi dividida nas etapas de: criação (diagnóstico, motivação, oficinas didáticas, construção da BOA); execução (etapa material ou materializada, verbalização externa e interna, etapa mental); controle final; e verificação da retenção do conceito, todas elas baseadas em uma aproximação da Teoria da Atividade .

6.4.1 ETAPA DE CRIAÇÃO

6.4.1.1 DIAGNÓSTICO

A etapa de criação teve início com a realização de um diagnóstico de todos os estudantes ativos do Curso, de forma não presencial, em todos os polos, através da plataforma *Moodle,* na forma de um questionário semiestruturado composto de duas partes: levantamento de perfil e situações problemas. A identificação do perfil foi realizado de acordo com os pressupostos da pesquisa descritiva (investigar questões de gênero, sociais, culturas e econômicas) e as situações problemas foram propostas com o intuito de diagnosticarmos os conhecimentos sobre o conteúdo Triângulos no momento inicial do estudo.

As situações problemas remeteram a elementos conceituais e procedimentais do conteúdo, em situações nas quais o estudante deveria decidir pela formação de triângulos ou não; identificar representações geométricas apropriadas e apresentar cálculos matemáticos corretos. Também, questionamos os estudantes quanto ao aspecto profissional: se estas tarefas estariam apropriadas para o último ano do Ensino Fundamental e quais seriam as possíveis dificuldades que acreditava que os alunos teriam ao se confrontarem com as situações apresentadas no problema. As respostas a estes itens serão apresentadas posteriormente, na discussão dos dados.

6.4.1.2 MOTIVAÇÃO

A etapa motivacional tem como objetivo propiciar ao estudante situações problemas que despertem seu desejo de elaborar um conhecimento específico. Nessa etapa trabalhamos com elementos da História da Matemática, no campo geométrico, priorizando nosso recorte de conteúdo. A etapa foi realizada de forma online, sendo apresentados e discutidos dois vídeos no ambiente de aprendizagem *Moodle*: “Forma dentro da Forma” e “O barato de Pitágoras”, ambos de domínio público, elaborados e divulgados pelo MEC e disponíveis no sítio: www.dominiopublico.gov.br. Todas as orientações necessárias para o acesso a essas mídias foram dadas aos estudantes.

Os vídeos destacavam a importância da utilização da Geometria nos tempos mais remotos da civilização, bem como tarefas que indicam a utilização de conhecimentos relativos aos Triângulos até os dias atuais. A percepção dos estudantes (concreta e abstrata) foi realizada nos polos, durante as cinco oficinas presenciais realizadas nos polos que apresentaram maior número de estudantes matriculados. Durante as oficinas, de forma presencial, concretizamos a etapa de elaboração da orientação das ações para a formação do conceito de triângulo nos estudantes participantes.

6.4.1.3 OFICINA DIDÁTICA

Durante os primeiros dois meses de pesquisa (março e abril de 2014), realizamos oficinas didáticas com os estudantes, em cinco polos, para discutirmos o conteúdo de Triângulos. As oficinas tiveram duração total de quatro horas e nelas realizarmos construções didáticas envolvendo a temática inicial; apresentamos as funções do software *GeoGebra* necessárias a realização das tarefas posteriores*;* e elaboramos da BOA. Participaram das oficinas didáticas 34 estudantes dos seguintes polos: Alagoa Grande (12); Campina Grande (03); Itaporanga (04); João Pessoa (09) e São Bento (6).

6.4.1.4 CONSTRUÇÃO DA BOA

Ao final das oficinas didáticas, discutimos com os estudantes uma proposta de construção de uma orientação, relativa ao recorte de conteúdo considerado. Nesse momento propomos aos 34 estudantes participantes a elaboração de um relatório escrito, com base na orientação destacada no Quadro 02.

Quadro 02 – Orientação para construção da BOA

Os itens de investigação da Base Orientadora da Ação – BOA devem conter todas as características essenciais e relevantes do conteúdo estudado. O professor deve centrar a atenção na construção de uma boa orientação para o estudante, que seja suficiente, e que garanta a aprendizagem. Assim, elabore a seguir os itens que você considera essenciais e relevantes ao conhecimento do estudante, ao fim do Ensino Fundamental, na aprendizagem do conteúdo: Área e Perímetro de triângulos.

Fonte: Construção da pesquisadora

Ao discutimos os itens evidenciados pelos estudantes, fornecemos-lhes a orientação sobre o conteúdo Triângulos, elaborados por nós, e pedimos que averiguassem se faltava algum item essencial e relevante ao estudo. Durante as oficinas também foram organizados os grupos, formados por dois estudantes, para trabalharem posteriormente em outras tarefas da pesquisa. Esta orientação se aproximada da BOA do tipo II, sendo proposta por Talizina (2000) em seus estudos.

6.4.2 EXECUÇÃO

A fase de execução constituiu o momento mais longo da pesquisa e contou com subtópicos diversos: etapa material ou materializada; etapa da linguagem externa (verbal); e etapa da linguagem interna, as quais serão discutidas adiante.

6.4.2.1 ETAPA MATERIAL OU MATERIALIZADA

Nessa etapa organizamos os estudantes em grupo, para realização das tarefas nos polos, de forma presencial ou a distância, conforme a disposição de cada grupo e elaborados horários de encontros de cada dupla, conforme sua disponibilidade. Neste momento fornecemos os cartões contendo a orientação em forma de arquivo, que já lhes havia sido entregue na forma impressa, durante as oficinas didáticas. O objetivo, neste momento era que os estudantes resolvessem em duplas as tarefas diversificadas sobre o conteúdo.

Ainda na etapa de execução, foram propostas questões diversificadas envolvendo elementos do estudo de Triângulos, em duplas, inicialmente com o auxílio do cartão. As 20 questões deveriam ser resolvidas pelas duplas e depois enviadas, de forma *off-line,* para as pesquisadoras pela plataforma *Moodle*. Todas as tarefas desta etapa encontram-se disponíveis no Apêndice A deste texto.

6.4.2.2 ETAPA DA LINGUAGEM EXTERNA: VERBALIZAÇÃO.

Na semana seguinte à que realizamos as tarefas da etapa material ou materializada, seguimos para a Etapa de Verbalização. Neste momento ainda permanecemos com as duplas, com os cartões, reduzindo o número de questões para 10, mas com um nível de complexidade maior. A verbalização ocorreu de forma escrita, já que seria difícil realizá-la em tempo real, de forma oral, com 65 participantes, até esse momento, de forma virtual.

Uma alternativa seria o uso da ferramenta *chat* (em tempo real) para acompanharmos a verbalização dos estudantes com base na realização das tarefas desta etapa mas, para isso, era necessário agendar dia e horário capaz de concentrar os estudantes na tarefa, o que não foi possível, em razão do número de participantes. Por essa razão, optamos pelo registro escrito enviado de forma off-line.

6.4.2.3 ETAPA DA LINGUAGEM INTERNA: PARA SI

Na etapa seguinte foi proposta a realização de tarefas com um único tipo de questão, padronizadas, sem a utilização de orientação externa, de forma individual, no ambiente de aprendizagem, utilizando a ferramenta *Envio de tarefa off line*.

6.4.2.4 ETAPA MENTAL

Na etapa Mental os estudantes foram convidados a realizar uma tarefa de forma individual, sem a ajuda de orientação externa. A tarefa demandava criatividade na elaboração de um jogo ou uma situação problema envolvendo elementos do conteúdo relativo a Triângulos, adequado ao trabalho com alunos do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Nossa expectativa era que, nesse momento, fossem utilizados os conhecimentos que já havíamos discutido mas, também, fossem elaboradas propostas que extrapolassem as situações já discutidas nas aulas.

6.4.3 CONTROLE FINAL

Nessa etapa desejamos verificar a aprendizagem individual de cada estudante, sendo realizadas novas tarefas, as quais comtemplavam todas as etapas anteriores, com o mesmo grau de complexidade. Esta fase ocorreu nos polos, de forma individual, sem consulta, sob a supervisão dos tutores presenciais de cada polo, com tempo determinado. As questões deveriam ser respondidas de forma escrita e presencial pelos estudantes, no tempo de duas horas.

6.4.4 VERIFICAÇÃO DA RETENÇÃO DO CONCEITO

Encerrados todos os procedimentos, dois meses depois realizarmos a verificação da assimilação da ação com relação ao conteúdo Triângulos. O objetivo neste momento foi avaliar a compreensão do estudante durante o período anterior da investigação. Nesse momento realizamos tarefas com todos os estudantes, agora matriculados na disciplina de Tópicos Especiais em Matemática III, com a devida autorização do professor e da Coordenação do Curso. Os alunos não foram informados previamente do procedimento, que compreendeu uma tarefa integrada à rotina da disciplina. A proposta ocorreu de forma *off-line*, por meio da apresentação de três problemas com grau de complexidade alta, aplicado em situações internas à Matemática e relativas a outras áreas de conhecimento, como indicado no referencial teórico que adotamos. Os resultados do estudo serão apresentados na próxima seção, bem como a análise destes em relação ao nosso aporte teórico.

7 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Nesta seção apresentamos os dados que considerados relevantes para contextualizar as análises realizadas nesse estudo e, após o tópico de apresentação do levantamento desses dados, fazemos a apresentação das etapas de estudo e análise, conforme critérios indicados no tópico relativo aos procedimentos metodológicos dessa pesquisa.

7.1 IDENTIFICAÇÃO DE DADOS E ANÁLISE

A pesquisa de campo ocorreu durante os meses de fevereiro a setembro de 2014, que corresponde a todo o semestre de 2014.1 e início do semestre letivo de 2014.2. Durante este período forma aplicados 73 questões distribuídas em 23 tarefas, incluindo toda produção escrita (14); o levantamento do perfil da turma (1); a organização dos grupos (1); as oficinas temáticas (5); a tarefa de aferição de controle (1); e, por último, a verificação do controle qualitativo do conteúdo assimilado (1).

7.1.2 DIAGNÓSTICO: Conhecimentos Matemáticos sobre Triângulo

A primeira tarefa sugerida aos alunos participantes da pesquisa foi uma *tarefa diagnóstica*. Esta tarefa foi realizada na primeira semana de aula do curso e teve a intenção de averiguar os conhecimentos acumulados dos estudantes com relação ao conteúdo de área e perímetro de triângulos quaisquer, conteúdos esses explorados na Educação Básica brasileira. Nesse momento é coerente concebermos, como hipótese, que todo estudante, em nível superior (em nosso caso, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática a distância, do 5º período), deveria ter adquirido, segundo a matriz curricular vigente de nosso país, os conhecimentos essenciais e relevantes presentes na Educação Básica, ao longo de sua formação escolar. O Quadro 03 exibe os itens que compuseram a tarefa diagnóstica.

Quadro 03: Tarefa Diagnóstica

1 - Certo professor de Matemática ao preparar uma aula para uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental colocou a seguinte questão para que os estudantes resolvessem: Dispomos de três pedaços de madeira com tamanhos de 2 cm, 4 cm e 10 cm. Pergunta-se: *a) Qual representação geométrica plana que podemos formar com estes três pedaços de madeira?* *b) É possível obtermos um desenho desta representação? Caso afirmativo, esboce o desenho ou descreva sua resposta em texto.* *c) É possível calcularmos a área e o perímetro da figura representada?* *d) Caso o item anterior seja afirmativo, descreva todo o procedimento para obtermos tais resultados. (A resposta pode ser em forma de texto ou utilizando a simbologia matemática).* *2- A questão 01 está adequada aos estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental? Por quê?* *3- Quais seriam as possíveis dificuldades que os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental encontrariam ao se depararem com a questão 01? Explique.*

Fonte: Construção da pesquisadora

A tarefa diagnóstica foi implementada na ferramenta *Questionário*, do tipo pergunta e resposta, no ambiente de aprendizagem *Moodle*. O estudante era convidado a realizá-la em um prazo de uma semana, podendo executá-la em qualquer dia nesse período, sem a visualização das respostas de outros alunos. Ao iniciá-la, o estudante podia disponibilizar de uma hora consecutiva para sua realização e envio para correção. Antes deste momento, o aluno recebia alguns avisos com relação à execução da tarefa, apresentados no Quadro 04.

Quadro 04- Orientações para execução da tarefa diagnóstica

Aviso ao estudante
Antes de iniciar esta avaliação você deverá atentar para alguns itens: • A atividade consta de 03 itens. Ao inicializar você terá apenas uma única tentativa. Comece e termine a atividade. Todas as respostas podem ser realizadas apenas utilizando texto escrito. Caso deseje você pode utilizar fórmulas da matemática e/ou desenhos; • Ao iniciar a atividade diagnóstica você terá uma hora (1h) para responder sem interrupções e sem a utilização de nenhum instrumento para consulta como celular, livros, cadernos e outros materiais que caracterizem algum tipo de comunicação e/ ou pesquisa; • Você não deverá utilizar para consultas links, páginas da internet, dicionários ou documentos de quaisquer tipos de consulta com o computador no momento da realização da atividade, pois isso prejudicará sua atenção; • Você terá uma hora contínua (60 minutos) para realizar a atividade. Ao final deste tempo o sistema fecha não permitindo novo início.

Fonte: Construção da pesquisadora

Dos 97 alunos matriculados na disciplina, 72 estudantes participantes (74,3%) da tarefa diagnóstica. A ausência de 25,7% dos estudantes foi percebida como normal neste momento, o que atribuímos ao fato de estarmos na primeira semana de aula, período normal de ausências de alguns estudantes em todos os semestres do Curso, bem como em razão do alto índice de desistência como já discutido anteriormente.

A primeira questão da tarefa diagnóstica, apresentava uma situação escolar onde o estudante era convidado a refletir sobre a existência de uma figura plana a partir de três segmentos dados. As respostas que obtivermos ao fim desta primeira tarefa foram as seguintes: 28 estudantes (38,8%) acertaram todos os itens dessa primeira questão, enquanto 44 estudantes (61,2%) não acertaram nenhum item.

A maioria dos estudantes do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática não conseguiu resolver os itens de forma coerente (61,2%), já que as medidas oferecidas não possibilitavam a construção de um triângulo. Além de não perceberem isso, os estudantes apresentaram em suas respostas elementos como: afirmações de que a figura se tratava de um triângulo do tipo escaleno; sua representação na forma de um desenho; cálculo de sua área utilizando a fórmula simplificada de área de triângulo, mesmo sem as informações necessárias para isso, no caso, as medidas de sua base e altura. Os estudantes que acertaram todos os itens (38,8%) afirmaram que não poderiam formar uma figura plana fechada com as medidas indicadas, sugerindo que a resposta para este item poderia ser uma linha poligonal formada por segmentos de retas interligados.

Na segunda questão os estudantes precisavam avaliar a adequação (ou não) do primeiro item para turmas de 9º Ano do Ensino Fundamental, com 95% de respostas positivas, ou seja, a maioria dos participantes afirmou que a questão estaria adequada para este ano de escolaridade, estando corretos em sua assertiva. De acordo com os indicadores de avaliação da aprendizagem matemática (BRASIL, 2003), ao final de cada período de escolaridade (3º, 5º, 9º do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio) o estudante do Ensino Básico deve apresentar determinados conhecimentos com relação aos conteúdos de áreas/perímetro de triângulos quaisquer.

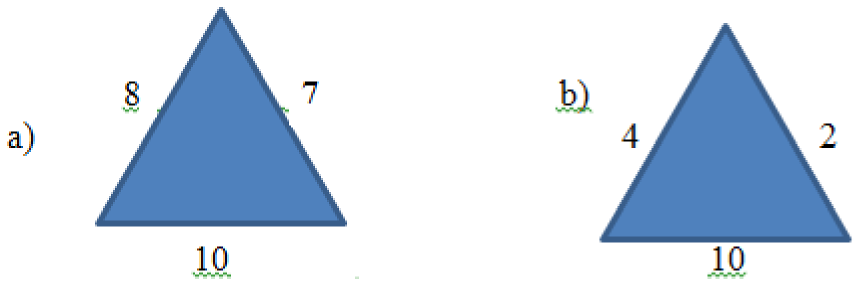
A última questão da tarefa diagnóstica, a Questão 3, apresentada no Quadro 03, solicitava que o estudante evidenciasse as possíveis dificuldades que poderiam existir na execução da Tarefa 1, por um aluno do Ensino Fundamental, tendo a maioria (95%) afirmado que imaginavam que o aluno desse nível de escolaridade apresentaria dificuldades, dentre as quais destacaram: as relativas à representação da figura no plano; e a identificação de que figura iria ser formada. Os estudantes que acertaram o item afirmaram que a principal dificuldade seria quanto ao reconhecimento e o uso do Teorema da Desigualdade Triangular e 5% dos estudantes não responderam este item.

Diante dos dados obtidos na tarefa diagnóstica, constatamos que, apesar dos conteúdos relativos à geometria do triângulo estarem entre os mais elementares do bloco Espaço e Forma e acompanharem a vida estudantil durante todo o Ensino Básico, uma vez que deveriam ser retomados e aprofundados no período, os alunos chegam ao ensino superior sem o devido conhecimento sobre esta temática, não sendo capazes de solucionarem problemas que envolvem esses conceitos básicos.

Uma nova situação matemática foi proposta aos participantes, envolvendo o conteúdo Triângulo, com um grau de complexidade maior, retirando-se a contextualização e destacando apenas os aspectos de compreensão matemática (Quadro 05).

Quadro 05- Triângulo na perspectiva de procedimentos

Calcule a área e o perímetro das seguintes figuras geométricas planas abaixo, mostrando, de forma detalhada, como você realizou os cálculos.



Fonte: Construção da pesquisadora

Nosso objetivo era verificar se, ao retirarmos o contexto que envolvia a situação anterior (Questão 1- Quadro 03), os estudantes conseguiam diferenciar uma representação triangular (item a) de uma não triangular (item b) e quais os procedimentos necessários para sua resolução. Os resultados apresentados foram: 44 estudantes (57,9%) acertaram o item a) da Questão 03, usando o Teorema de Heron, enquanto 43 estudantes (56,6%) acertaram o item b) percebendo que não existia um triângulo, apesar da figura induzir a essa ideia, também fazendo o uso do Teorema de Heron e da Desigualdade Triangular.

Os alunos que erraram os itens a) e b) calcularam a área dos dois triângulos pela fórmula de área simplificada e resolveram os itens subentendendo que os triângulos eram do tipo retângulo, mesmo sem as informações de altura e dos ângulos internos das figuras apresentadas. Participaram dessa etapa final de diagnóstico, 76 estudantes, perfazendo um total de 78,3% dos alunos da turma.

Ao final da etapa diagnóstica constatamos que, mesmo sendo apresentando o *feedback* da primeira tarefa diagnóstica e sendo retirado o contexto da situação inicial, apresentando-se apenas a representação gráfica dos triângulos, tivemos 56,6% de acertos no item b) contra 38,8% de acertos da situação inicial. Apesar de constatarmos um acréscimo nos acertos, muitos alunos ainda não perceberam as características essenciais e relevantes do conteúdo geométrico relacionado aos triângulos (42,1% erraram o item a) e 43,4% erraram o item b)).

Diante deste quadro, para verificação (ou não) de mudanças qualitativas ao final do semestre letivo, na compreensão dos participantes do Curso, quanto aos conteúdos tomados como foco em nossa pesquisa. Assim, iniciamos a fase de motivação da temática em questão, seguida da proposta de construção de diversas tarefas orientadas e, por fim, a elaboração em conjunto da base orientadora, com os estudantes e pesquisador, de forma presencial, o que discutiremos a seguir.

7.1.3 MOTIVAÇÃO

A etapa da motivação deve ser perseguida pelo motivo da ação, tendo como pressuposto básico: o sujeito e a sua vontade. Estes devem ser considerados componentes estruturais da atividade. A atividade do sujeito sempre corresponde a alguma necessidade e se dirige ao objeto que podem satisfazer esta necessidade. O objeto impulsiona e dirige a atividade do sujeito, por isso a aprendizagem só tem êxito quando satisfaz a necessidade cognoscitiva do sujeito. Este motivo pode ser de ordem externa ou interna como discutido anteriormente.

Desta forma, iniciamos várias discussões sobre a temática em questão, com momentos presenciais e a distância, utilizando diversos recursos didáticos com duração de duas semanas consecutivas, sendo eles: o ambiente virtual de aprendizagem e as oficinas temáticas presenciais.

Iniciamos a etapa motivacional de forma *off-line*, apresentando os vídeos: *O barato de Pitágoras* e *Forma dentro da Forma.* Na oportunidade discutimos também sobre a utilização de um tipo específico de triângulos, o triângulo retângulo. O uso de recursos didáticos diferenciados, como vídeos e jogos, podem estimular os estudantes a terem uma percepção mais positiva em relação à Matemática (LORENZATO, 2009; RÊGO, 2009).

As seguintes questões nortearam o momento inicial da etapa de motivação: *Por que necessitamos, ainda hoje, estudar o conteúdo de triângulos? Onde são utilizados os triângulos* *na atualidade? Quais as profissões que utilizam conhecimentos relativos aos triângulos? Quais as principais representações de triângulos que podemos encontrar na natureza?*

Na ocasião disponibilizamos o link dos vídeos, com orientações para a instalação e o acesso a eles (Quadro 06).

Quadro 06- Orientação para acessar vídeos matemáticos

Para realizar esta tarefa faz-se necessário que você assista a dois vídeos de matemática, disponível no site do governo: www.dominiopublico.gov.br *Ao acessar a página você deve escolher em Tipo de mídia: vídeo; categoria: Tv escola – matemática.* *Você será direcionado a uma página que contém vários vídeos matemáticos interessantes que discutem diversos conteúdos matemáticos.* *Você deve clicar no vídeo de número 12 – Forma dentro da Forma (atentando para os primeiros 10 minutos do vídeo) e depois, o vídeo de número 22 - O barato de Pitágoras.* *Clique nos vídeos e assista-os, anotando suas principais discussões.* *Estes vídeos não estão disponíveis na nossa página, devido ultrapassar a capacidade permita para exibição de arquivos no ambiente de aprendizagem. Logo, você deve acessá-los de uma máquina que tenha instalado algum programa para visualizar vídeos (Windows Mídia Play) e que tenham uma boa capacidade de reproduzi-los (seja rápido, com boa memória). Caso não consiga acessar os vídeos de sua máquina sugiro instalar o programa que decodifica vídeo com extensão* ***.mp4*** *tipo KLITE CODEC PACK (faça uma busca na internet). Com este programa instalado em sua máquina você poderá assistir aos vídeos; caso ainda não consiga procure ajuda nos polos, pedido auxílio aos tutores presenciais de seu polo.* *Bons estudos.*

Fonte: Construção da pesquisadora

Considerando a natureza da principal ferramenta de comunicação que utilizamos, é necessário que tentemos prever as dificuldades que os estudantes que utilizam ferramentas online ou off-line poderão encontrar em seu ambiente de estudo, quer seja sua residência ou polo de apoio presencial. Aretio (2004, 2006) afirma que todo o planejamento das tarefas deve ser orientado com o maior cuidado e de forma adequada, já prevendo os possíveis erros dos estudantes. As orientações presentes no Quadro 06, indicam, além dos procedimentos necessários para a realização das tarefas, a forma de acesso aos dois links onde estão alocados os vídeos (procedimentos para execução dos vídeos), bem como orientações para instalação de aplicativos necessários para termos acesso aos vídeos na plataforma.

Enfrentamos algumas dificuldades quando vamos realizar uma tarefa nesses moldes, pois o acesso à Internet em muitos polos de municípios do interior do estado é de baixa qualidade, o que dificulta a organização de atividades com vídeos, videoconferências e tarefas *online,* como chats, dentre outras. O sistema UAB disponibilizou, na época da implantação do Curso, computadores e Internet em cada polo de apoio presencial. A manutenção e a atualização destas máquinas é responsabilidade dos municípios, que nem sempre se empenham como deveriam, estando a maioria dos polos com máquinas ultrapassadas, em muitos casos, sendo ainda as inicialmente disponibilizadas pelo MEC, em 2007.

Outro problema remete ao uso de *softwares* necessários à visualização e entendimento de informações relativas às tarefas. Para este procedimento faz-se necessário um conhecimento técnico, que muitas vezes nossos alunos não possuem. Para isso, solicitamos o apoio dos tutores presenciais que atuam nos polos, mas essa colaboração nem sempre funciona como prevemos, pois constatamos que nos últimos períodos letivos do Curso, os estudantes frequentam pouco os polos de apoio presencial, em comparação à presença marcada no início do curso.

Uma das explicações para essa diminuição da ida dos alunos ao polo reside no fato de, com o tempo, muitos estudantes adquiriram máquinas particulares e acessam Internet em outros espaços. Como muitos deles moram longe do polo, em sítios ou municípios vizinhos, e nem sempre contam com sistemas de transporte eficiente ou condições econômicas que garantam a locomoção até o polo, essa é uma necessidade percebida por muitos.

Durante nossa pesquisa, as dificuldades de acesso aos vídeos foram contornadas com o auxílio das máquinas pessoais dos estudantes. Após assistir os vídeos recomendados eles foram convidados a elaborar um resumo contendo as principais discussões neles apresentadas, bem como responder às seguintes indagações: *De que trata o vídeo 12- Forma dentro da Forma? De que trata o vídeo 22- O barato de Pitágoras? No vídeo 12 foi mostrado um esquadro utilizado pelos egípcios para realizar medições. Explique de que material era confeccionado este esquadro e como era utilizado pelos egípcios? Este esquadro era baseado em que teoria matemática? De acordo com o vídeo 22 onde são usados os triângulos? Por que esta forma geométrica foi e ainda é tão utilizada na sociedade?*

Dos 65 alunos participantes, a maioria realizou uma síntese adequada dos dois vídeos, apresentando os principais pontos abordados, de forma coerente, assim como respondendo corretamente (89,2%) às questões apresentadas; 2% dos estudantes não assistiram os vídeos nem responderam as questões; enquanto 10, 8%, realizaram seus resumos de forma bastante sucinta, deixando de abordar elementos importantes de ambos os vídeos.

7.1.4 TAREFAS ORIENTADAS

Na etapa motivacional optamos por realizar vários experimentos, tanto de forma presencial quanto na modalidade a distância, o que também ocorreu nas cinco oficinas temáticas, que ocorreram no período de 15 de março a 12 de abril de 2014, aos sábados, pela manhã, com duração de quatro horas consecutivas, em cinco polos: João Pessoa, Campina Grande, Alagoa Grande, São Bento e Itaporanga. Esses polos foram escolhidos por concentrarem o maior número de alunos matriculados no semestre 2014.1 e entendermos que os momentos presenciais são importantes em cursos a distância. Em nosso Curso, geralmente ministramos aulas presenciais nos polos na semana que antecede as duas avaliações presenciais em cada semestre letivo.

Das oficinas didáticas participaram 34 alunos distribuídos nos polos visitados, tendo como principal meta discutir o conteúdo triângulos, na perspectiva conceitual e procedimental, bem como apresentar possibilidades metodológicas de ensino, de acordo com diferentes graus de complexidade de apresentação do conteúdo. Para isso, apresentamos vários materiais que podem ajudar os futuros professores em aulas de Matemática, como o quebra-cabeça Tangram; dobraduras; jogos; uso de materiais manipulativos, como palitos diversos (picolé, fósforo, churrasco, canudos); uso de malha quadriculada, para exploração de área e perímetro, dentre outros. Essas orientações estão presentes nos livros didáticos utilizados pelos estudantes do Curso, elaborados pelos docentes que nele atuam.

Ainda na etapa motivacional convidamos os estudantes a observarem várias representações geométricas planas (dentre elas o triângulo), realizando ações diversificadas tais como: nomear as figuras; efetuar o cálculo de área e perímetro; realizar inferências sobre as diferenças e semelhanças entre figuras planas (por exemplo, entre triângulo e quadrado); evidenciar os tamanhos dos lados, ângulos e vértices das figuras planas observadas, dentre outras.

Os alunos foram instruídos a usar o aplicativo G*eoGebra* para traçar triângulos diversos e registrar todas as suas características no caderno, explicando seu desenvolvimento. Nessa etapa o aluno realiza as tarefas de forma externa, no plano prático, concreto e de forma detalhada. Foi solicitado, ainda, que provassem o teorema da desigualdade triangular.

Esse tipo de tarefa permite que o professor possa estabelecer o nível dos alunos com relação às seguintes questões: identificar e explicar o conceito da representação geométrica abordada; descrever a área e o perímetro da representação matemática e conhecer os elementos utilizados para explicar o conceito de triângulo (TALIZINA, 2000).

7.1.5 AS OFICINAS NOS POLOS PRESENCIAIS

Das cinco oficinas temáticas que ministramos, participaram 34 estudantes, de um total de 60 alunos ativos na disciplina, e de 97 matriculados no Curso, no início do semestre. As discussões realizadas nas oficinas foram as mesmas, ocorrendo em momentos distintos, porém consecutivos. Cada polo oferece infraestrutura e recepção diferente aos participantes, sendo os aspectos estruturais, manutenção e pessoal administrativo de responsabilidades das prefeituras onde está localizado cada polo.

Na oficina realizada no polo de João Pessoa, localizado no Centro de Capacitação de Professores do município, em um bairro próximo ao centro da cidade, compareceram nove estudantes, que se mostraram inquietos em relação ao que iria acontecer. Iniciamos o trabalho com uma breve apresentação de cada participante e, em seguida, fizemos uma exposição da pauta de atividades e começamos as discussões programadas.

O primeiro ponto abordado foi uma breve explanação sobre as tarefas já realizadas (tarefa diagnóstica e vídeos), seguida da distribuição de materiais para realização de alguns experimentos utilizando papel e palitos, para a construção (possível ou não) de triângulos. Por último, discutimos o aplicativo *GeoGebra,* em uma simulação feita com a ajuda de equipamento multimídia.

O segundo ponto de discussão foi sobre como ensinamos hoje o conteúdo relativo a triângulos no segundo segmento do Ensino Fundamental (6º ao 9º Anos). Nesse momento apresentamos um exemplo de como esta temática está estrutura no currículo escolar, baseando-nos nos documentos oficiais do Estado (PARAIBA, 2010), nos documentos oficiais nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2000) e na coleção didática que analisamos. Ou seja, para cada ano de escolaridade destacado, estariam previstos os seguintes tópicos:

- *6º ano do Ensino Fundamental:* Planificação de sólidos geométricos; perímetro de figuras planas; área de figuras planas; composição e decomposição de áreas básicas;

- *7º ano do Ensino Fundamental:* Principais características dos Triângulos; Ângulos internos de triângulos; construção de triângulos diversos; área de triangulo.

- *8º ano do Ensino Fundamental:* Triângulos; Condições de existência de triângulos; Medidas de lados do triângulo; Teorema da Existência de Triângulo (desigualdade triangular) - a medida de qualquer lado é menor do que a soma da medida dos outros dois lados; Congruência entre triângulos; Conceitos de mediana, mediatriz e bissetriz em figuras planas (triângulo); Medida dos lados de um triângulo retângulo e a área de quadrados; Teorema de Pitágoras; Simetria de figuras planas (triângulos);

- *9 º ano do Ensino Fundamental:* Relações métricas no triângulo (catetos, hipotenusa); Teorema de Pitágoras (demonstração); aplicação de triângulos; Trigonometria do triângulo.

Na sequência apresentarmos alguns procedimentos metodológicos que podem ser utilizar no desenvolvimento dos conteúdos que envolvem triângulos, no Ensino Fundamental. Também realizamos alguns experimentos utilizando o *GeoGebra,* na construção de triângulos quaisquer. Os experimentos no aplicativo foram apresentados visando as discussões posteriores no ambiente de aprendizagem. Nesse momento percebemos muitas dificuldades nos estudantes, o que não esperávamos que ocorresse, uma vez que o software *GeoGebra* é explorado desde o primeiro período letivo do Curso, e em todos os períodos, nas disciplinas de Matemática para o Ensino Básico I, II, III e IV (MEB I, MEB II, MEB III e MEB IV); nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (I, II e III) e outras disciplinas.

Durante o uso do *GeoGeobra* surgiram muitas dúvidas dos estudantes sobre as ferramentas básicas do aplicativo, tais como: *Como eu construo um triângulo, a partir de três pontos quaisquer? Quais as inclinações das retas? Onde gerar esta figura? Como calculo a área? Como coloco as nomenclaturas dos segmentos de retas, vértices e ângulos?* As questões potencializaram a compreensão de algumas ferramentas básicas do aplicativo e nos permitiram esclarecer as dúvidas naquele momento. Este procedimento ocorreu em todos os polos presenciais onde foram ministradas as oficinas didáticas. A etapa seguinte correspondeu à elaboração do esquema de orientação da ação.

7.1.6 A ELABORAÇÃO DA BOA

A construção da BOA ocorreu de modo indireto, inicialmente, e direto no final do processo. No primeiro caso, sendo discutida durante toda a oficina didática, instigando a percepção dos itens necessários para a discussão do conteúdo em tela. Ao final da oficina, os alunos receberam uma folha de papel com o seguinte texto: *Os itens de investigação da Base Orientadora da Ação – BOA - devem compreender todas as características essenciais e* *relevantes do conteúdo estudado. O professor deve centrar a atenção na construção de uma boa orientação para o estudante, que seja completa, e que garanta a aprendizagem. Assim, elabore os itens que você considera essenciais e relevantes ao conhecimento do estudante, ao fim do Ensino Fundamental, na discussão do conteúdo: Área e Perímetro de triângulos.*

Em resposta à atividade, os estudantes destacaram: conhecer as medidas do triângulo (41,1%); saber formar o triângulo (35,3%); desigualdade triangular (53%); tipos de triângulos (76,5%); perímetro (47%); somatório dos ângulos internos igual a 180º (47%); ângulo interno igual a 90° no triângulo retângulo (11,7%); identificar os lados do triângulo: catetos e hipotenusa (17,6%); área do triângulo A= (bxh)/2 (88,3%); Teorema de Pitágoras (17,6%); conhecer as formas geométricas (6%); conhecer a importância dos triângulos hoje (6%); usar material concreto para o entendimento do aluno (17,6%); conhecer a Fórmula de Heron (6%); conhecer trigonometria no triângulo retângulo: sen, cos e tangente (6%).

Percebemos que os estudantes evidenciaram em suas respostas elementos que remetem a sua vivência estudantil, como a fórmula da área de triângulo, simplificada, dada por A= (bxh)/2 (88,3% dos estudantes); os tipos de triângulos (76,5%) e a desigualdade triangular (53%). Considerando as sugestões dos estudantes para construção da orientação, apresentamos nossa concepção acerca das características essenciais e relevantes, de forma geral, para o conteúdo da BOA, tipo II, na discussão de triângulos para o Ensino Fundamental, dispostas no Quadro 07. Estes itens foram amplamente discutidos, ao final das oficinas temáticas, e não houve acréscimo à lista por parte dos estudantes.

Quadro 07: BOA para o estudo de triângulos no Ensino Fundamental

Base Orientadora da Ação – Área de Triângulos
Cartão construído com o professor e estudantes. Principais orientações para os estudantes: *Observar se existe uma figura fechada.* *Identificar se existem três lados na figura.* *Identificar se a figura possui três ângulos internos.* *Identificar os valores dos lados e dos ângulos;* *Verificar se a soma dos ângulos internos do triângulo totalizam 180º;* *Verificar se a soma de dois lados da figura é maior ou igual ao terceiro lado. Realizar este experimento com todos os pares de lados. (Desigualdade triangular)* *Identificar características típicas como área e perímetro da figura;* *Existem os três lados fechados? Então é possível calcular sua área e perímetro independente de quaisquer medidas de seus ângulos internos utilizando a fórmula de Heron A²= [p.(p-a).(p-b). (p-c)]. Onde* *p= (a+b+c)/2.* *Existe apenas a informação de dois lados, mas o triângulo é composto por um ângulo interno reto? Logo é possível utilizar o Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa*

é igual à soma dos quadrados de seus lados ($a^2 = b^2 + c^2$) para calcular um de seus lados.
E utilizar a fórmula reduzida da área: A = (b.h)/2
Existe a informação de dois lados e um ângulo qualquer entre estes lados? Logo podemos usar a formula do Teorema das áreas: A área do triangulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por estes lados: $Área = \frac{c.b.sen\hat{A}}{2}$
Dar um título apropriado à figura, conforme suas características.

Fonte: Construção da pesquisadora

Depois que apresentamos a BOA completa e de sua discussão, percebemos a reação de surpresa dos estudantes com a complexidade do conteúdo, que afirmaram nunca terem atentado para esta forma de organização e desconhecerem alguns itens, como o Teorema de Heron e a fórmula da área que envolve o seno entre dois ângulos de um triângulo.

Ao final das oficinas didáticas percebemos uma grande interação entre os estudantes, com várias discussões paralelas, tais como: organizações dos estágios, organização de comissão para tratar da conclusão de curso, dificuldades do curso, dentre outras. Esta postura se repetiu em todos os polos com maior e menor ênfase. Outro fato importante é que evidenciamos várias formações de grupos de estudos, já existentes em alguns municípios.

7.1.7 ESCOLHA DAS DUPLAS

A escolha das duplas, inicialmente, foi sugerida pelos próprios estudantes nos momentos das oficinas didáticas. Depois disponibilizamos um fórum para que os estudantes indicassem suas duplas, com poucos alunos participando. Posteriormente, os estudantes que não compareceram as oficinas e que não se manifestaram no fórum foram agrupados de forma aleatória, pelo pesquisador, formando duplas preferencialmente entre alunos de um mesmo polo. Essa última opção provocou conflitos depois que divulgamos os nomes das duplas, pois alguns estudantes tinham problemas pessoais com colegas, em razão de diferenças políticas ou familiares. Outros estudantes haviam desistido da disciplina, e outros, apesar de participarem virtualmente, não faziam isso de modo regular, o que prejudicou a participação de alguns grupos, principalmente por esta dinâmica ser inovadora no curso de Matemática a distância. Estes fatos, geralmente, não são evidenciados com tanta ênfase, em cursos presenciais regulares nas instituições de ensino superior.

7.2 ETAPA MATERIAL OU MATERIALIZADA

Após as oficinas, nas semanas subsequentes, realizamos várias tarefas envolvendo a discussão acerca de triângulos quaisquer. A primeira tarefa foi realizada para testamos a ferramenta *GeoGebra* e nossa interação com a turma de modo *online*. Desta forma, solicitamos que os estudantes construíssem um triângulo qualquer utilizando o aplicativo *GeoGebra* no ambiente de aprendizagem *Moodle,* de forma *off-line*.

Nesse momento foram fornecidas as orientações básicas mostradas no Apêndice I, para a instalação do aplicativo *GeoGebra*, bem como instruções sobre a utilização das ferramentas necessárias para o êxito da tarefa, conforme indicado por Veloso (2000) e Amman e Gonzales (2012), sobre a elaboração de tarefas usando aplicativos dinâmicos e o *GeoGebra* no estudo da Geometria.

Também conferimos o suporte do polo disponível ao estudante desde as máquinas necessárias (computadores, equipamento multimídia); o pessoal de apoio (secretaria, coordenador, motorista); e a assistência especializada (tutores presenciais na disciplina, no caso, na Matemática, e os tutores a distância, nos polos). Essa estrutura deve ser prevista pelos profissionais que realizam tarefas a distância (ARETIO, 2004, 2006). Talizina (2000) também indica em seus estudos o uso de computadores para realização de tarefas matemáticas.

Após a construção do triângulo solicitado, propomos aos estudantes as questões apresentadas no Quadro 08.

Quadro 08 – Perguntas sobre a construção de Triângulos utilizando o *GeoGebra.*

Questões:
a) *O que difere realizar construções matemáticas utilizando aplicativos, como no nosso caso o GeoGebra, de uma atividade realizada de forma tradicional (utilizando quadro, papel, lápis e livro didático, por exemplo) nas aulas de matemática?*
b) Você acha que a aprendizagem do estudante melhora com o uso de aplicativos na matemática? Por quê?
c) Foi de fácil utilização didática o aplicativo GeoGebra para você?
d) Indique outra aplicação em conteúdos matemáticos do GeoGebra no Ensino Básico vigente.

Fonte: Construção da pesquisadora

Nosso objetivo nesse momento era discutir a Resolução de Problemas no formato proposto por Polya (1995), por Pozo (1998) e por Van de Walle (2009), bem como verificar o impacto desta atividade utilizando o aplicativo *GeoGebra, c*onforme estudos de Veloso (2000), Souza (2009) e Ammann e Gonzales (2012). O uso dessa metodologia visava motivar a descoberta por meio das construções propostas e, ao mesmo tempo, explorar as ferramentas do *software*.

Entendemos, ainda, que o conhecimento da ferramenta *Geogebra* não somente em tarefas de execução, mas de construção, facilitará a elaboração de tarefas matemáticas quando os licenciandos estiverem atuando no ensino desta disciplina em seus municípios.

As respostas de 61 participantes ao primeiro item a) do Quadro 08, foram as seguintes: 58 alunos (95,1%) responderam que a utilização do aplicativo *GeoGebra* fornece mais subsídios para um melhor entendimento da Geometria, uma maior compreensão das representações matemáticas e maior rapidez, mas que acham que os alunos de suas regiões não saberiam utilizá-lo, por falta de acesso a máquinas e por não terem conhecimentos necessários de Matemática. Vale destacar a visão de que é preciso dominar o conteúdo para poder elaborar representações no *software*, e o não entendimento de que é possível elaborar conhecimentos por meio da exploração do aplicativo.

Apenas um estudante afirmou que não utilizaria o aplicativo em suas aulas, pois teve muita dificuldade em realizar a tarefa, consequentemente, seus alunos também terão. O restante dos estudantes (3,2%) não responderam ao item.

Em resposta à questão b) apresentada no Quadro 08, 47 estudantes (93,4%) responderam que o aplicativo *GeoGebra* estimula a aprendizagem de Matemática, favorecendo sua compreensão; apenas 2 alunos (3,3%) responderam que não, pois, para eles, se os alunos têm dificuldades com quadro e giz, imagine com um aplicativo que não dominam.

Quanto a terceira questão (c), 11 estudantes (14,8%) responderam que já haviam trabalhado com o *GeoGebra* em algum momento de sua vida acadêmica, enquanto 50 estudantes responderam que não, pois não tinham o domínio necessário para sua utilização. Esse fato remete à necessidade de reflexão sobre algumas disciplinas do Curso que, apesar de explorarem o aplicativo desde os primeiros semestres, não preparam os estudantes para um uso mais eficiente desse recurso, ou seja, os estudantes são convidados apenas a responderem questões prontas, elaboradas com o auxílio do *GeoGebra,* mas que não demandam o manuseio pelo discente.

No item d) todos os estudantes indicaram que o aplicativo poderia ser utilizados nos conteúdos de Função, na construção de gráficos de funções do 1º e do 2º graus, matrizes, trigonometria, ângulos e nas construções de circunferências.

De forma geral percebemos uma grande dificuldade dos estudantes na utilização do aplicativo *GeoGebra*. Desde o primeiro momento, em sua instalação, seguindo na utilização das ferramentas e, por último, no preconceito em sua utilização com as crianças e jovens de sua região. Talvez por sentirem dificuldades no uso de computadores, os estudantes de forma indireta, remetem sua experiência pessoal aos seus futuros alunos, fato este que nem sempre se repete, pois sabemos que a maioria dos adultos que participam de cursos a distância são pessoas que se afastaram dos estudos por vários anos, e que não são considerados *nativos digitais,* como a geração que se apresenta na atualidade (FERREIRA, SOUSA, 2014).

Em geral percebemos o receio de vários licenciandos quanto ao uso de tecnologias como metodologia de ensino de Matemática, já que estes não tiveram contato ou acesso a informática quando mais jovens e são de famílias de baixa renda, porém, essa realidade não inviabiliza o acesso nem o conhecimento das crianças e jovens atuais nesse campo, pois muitos utilizam novas tecnologias em celulares e computadores desde cedo.

Durante essa tarefa os estudantes organizaram a realização das próximas tarefas, em duplas. Evidenciamos vários problemas que apareceram ao constituirmos as duplas, tais como: solicitação de mudança do colega indicado, por razões pessoais; dificuldade no agrupamento com estudante de outro polo; número ímpar de participantes, sendo necessário organizar grupos com três participantes; alunos desistentes, que não informaram a sua situação. Todos os problemas identificados foram resolvidos a partir do diálogo com os participantes.

7.2.1 A FORMAÇÃO DOS GRUPOS NO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM MOODLE

A formação dos grupos ocorreu a partir da terceira semana da pesquisa. Essa experiência ainda não tinha sido utilizada no Curso de Matemática a distância e, portanto, demandou um estudo minucioso da ferramenta *Moodle* para formação de tarefas em grupo e depois o diálogo com os estudantes para incentivá-los na utilização da proposta e na interação com o colega.

Os grupos e subgrupos podem ser realizados no ambiente de aprendizagem *Moodle* nas versões mais recentes deste *software*, utilizando a ferramenta *agrupamento*. Um agrupamento pode ser entendido como uma organização de um grupo dentro de um mesmo curso. Podemos utilizar também subgrupos dentro deste grupo, que podem ser organizados em duplas, trios, ou outras composições que desejarmos.

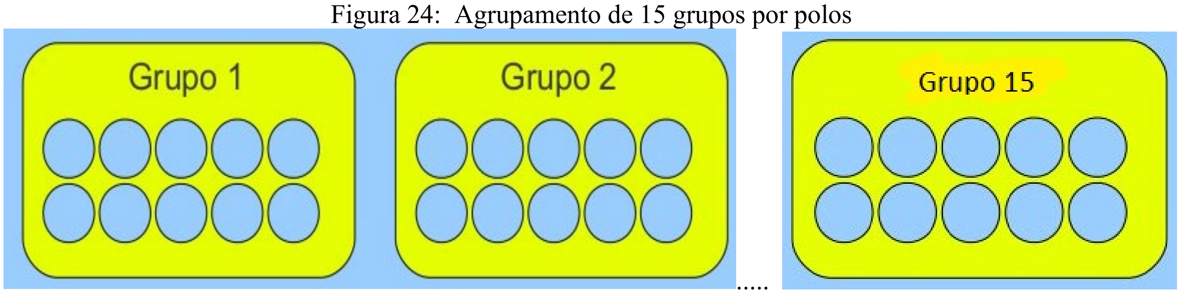
A organização da turma em grupos é uma alternativa realizada como controle correto, sugerida por Talizina (2000) quando esta remete ao controle entre pares, o qual é realizado organizando-se a turma em grupos de dois estudantes, cada um deles recebendo uma tarefa diferenciada. Um trabalha na execução da tarefa de forma usual (executor), enquanto o outro executa o controle da tarefa do primeiro aluno (avaliador).

Para a realização deste trabalho foram disponibilizadas aos estudantes todas as orientações necessárias. Caso o professor no decorrer da tarefa, observe que as opiniões dos estudantes divergem em algum momento, este realiza a mediação através da ajuda verbal ou por meio de algum material previamente elaborado, que ajude a esclarecer a questão em discussão. No nosso caso, esta orientação foi realizada pela tutoria (presencial e/ou a distância), disponível para todas as disciplinas do Curso, sendo os tutores devidamente preparados pelo professor.

Participaram da disciplina, inicialmente, 97 estudantes que deveriam ser agrupados por região e em duplas. Assim, formamos 15 grupos de polos, como indicado na Figura 18, com 48 subgrupos formados, inicialmente, por dois estudantes cada um (Figura 19). Visando um melhor entendimento da organização dos grupos polos e dos subgrupos desses polos, apresentamos a configuração final representadas nas figuras 24 e 25.

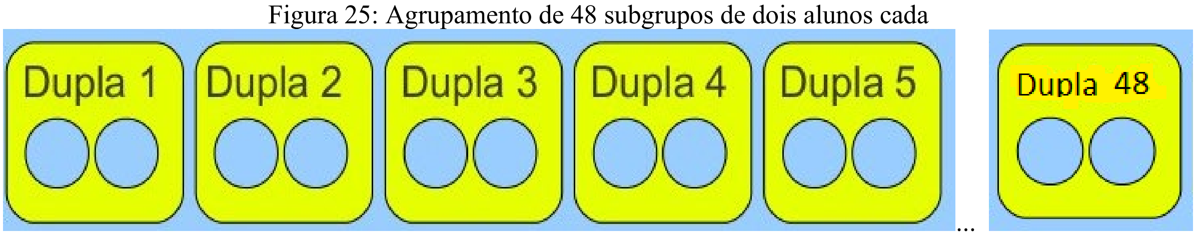
A partir de então, todas as tarefas foram configuradas para serem realizadas pelas duplas, pois o sistema passou a visualizar não o aluno individualmente, mas o grupo ao qual ele está vinculado. A qualquer hora, o operador do curso pode configurar os estudantes de forma individual, o que é feito no sistema, de acordo com a necessidade de cada tarefa.

Figura 24: Agrupamento de 15 grupos por polos



Fonte: Adaptado de Yamin (2011)

Figura 25: Agrupamento de 48 subgrupos de dois alunos cada



Fonte: Adaptado de Yamin (2011)

Após a formação dos agrupamentos de polos e de duplas realizamos a apresentação das duplas e explicamos o seu funcionamento aos estudantes da disciplina. Inicialmente solicitamos que, no momento das oficinas, indicassem suas duplas, depois realizamos esta solicitação por meio de um Fórum Geral. Os estudantes que não indicaram suas duplas foram organizados seguindo a prioridade de localização nos polos e participação na disciplina. Formamos, desse modo, 48 duplas, sendo uma delas composta por três estudantes, por termos um número ímpar de alunos (97) e um polo com apenas três participantes (Taperoá). Os problemas observados no processo (de ordem pessoal dos estudantes; da constatação de abandono da disciplina) foram resolvidos relocando-se o componente para outros subgrupos, atendendo solicitação do estudante.

7.2.2 PRIMEIRA TAREFA REALIZADA COM OS GRUPOS

A primeira tarefa realizada com os grupos (Apêndice I) ocorreu após as oficinas temáticas. Nossa intenção neste momento era realizar o primeiro teste com os grupos e verificar sua interação com os estudantes e com a ferramenta *Geogebra*. Foi proposta uma tarefa composta por duas partes: a *construção e verificação de características de triângulos quaisquer*, e *a verificação da altura, da área e do perímetro da representação construída por cada grupo*. A elaboração desta tarefa baseou-se nas orientações didáticas da Resolução de Problemas proposta por Van de Walle (2009) e no uso de aplicativos didáticos proposto por Ammann e Gonzages (2012).

A orientação era a seguinte: um dos estudantes deveria realizar a primeira parte da tarefa (executor), sendo observado pelo outro (avaliador). Em seguida o outro ficaria responsável pela segunda parte, cabendo esta escolha da realização da primeira ou da segunda parte pela dupla, sendo ela responsável por sua organização, execução e envio. Este tipo de controle é realizado pelo estudante (controle entre pares) e ajuda a desenvolver a autonomia e capacidade crítica dos participantes. A tarefa proposta está presente no Quadro 09.

Quadro 09: Primeira tarefa realizada no formato de duplas

Tarefa a ser realizada pela dupla: aluno 1 e aluno 2 *Aluno 1:* ________________________________ *mat.:* ________ *Aluno 2 :* ________________________________ *mat.:* ________ *O aluno 1 realizará a* ***Parte I*** *e aluno 2 realizará a* ***Parte II****. Quando o aluno 1 terminar a parte I, este apresentará e discutirá com o aluno 2 a sua execução e os procedimentos adotados (de forma presencial ou a distância). O aluno 2, neste momento, será o revisor da atividade realizada pelo aluno 1, cabendo a ele (aluno 2) a verificação de todos os passos adotados pelo aluno 1. Caso seja necessário, o aluno 2 poderá solicitar ao aluno 1 que refaça, total ou parcial, a parte I, justificando o seu pedido. Na parte II as competências dos estudantes são invertidas: agora o aluno 2 realizará toda a execução e os procedimentos da parte II, enquanto que o aluno 1 será o revisor.*

As discussões são necessárias e pertinentes entre a dupla. Cabe aos estudantes tentar resolverem as Partes I e II da tarefa que segue, só devendo recorrer à tutora ou a professora depois que discutirem, em conjunto, e esgotarem todas as tentativas de resolução.
Após o término, salvar o arquivo e um dos integrantes do grupo envia a tarefa finalizada.

Fonte: Construção da pesquisadora

Dessa tarefa participaram 34 duplas, das quais quatro (11,8%) não utilizaram o aplicativo *GeoGebra* como indicado nos procedimentos com relação a verificação da altura, área e perimétrico da construção realizadas, sendo insatisfatória a realização da maior parte da tarefa; 13 duplas (38,3%) realizaram de forma parcialmente satisfatória, pois não utilizaram a fórmula adequada para o cálculo da área e/ou não usaram a ferramenta adequada e/ou erraram a classificação do triângulo; 07 duplas (20,6%) realizaram a tarefa de forma satisfatória, errando apenas a classificação do triângulo; 10 duplas (29,4%) executaram a tarefa de forma satisfatória, realizando todos os procedimentos de forma adequada.

Ao final verificamos que o uso do computador para construção e verificação dos tamanhos do triângulo no experimento possibilitou: utilizar o aplicativo G*eoGebra* para confeccionar triângulos diversos e registrar todas as suas características escritas, explicando seu desenvolvimento. Nessa etapa o aluno realizou as tarefas de forma externa, no plano prático, concreto e de forma detalhada, contribuindo para uma maior independência. Tem a ajuda do outro estudante, se necessário, do tutor e, posteriormente, do professor, conforme sugere Talizina (2000) em seus estudos.

O estudante, nessa tarefa, também foi convidado a provar o Teorema da Desigualdade Triangular. Este tipo de controle permitiu estabelecer o nível dos alunos com relação aos seguintes aspectos: identificar e explicar a representação geométrica elaborada; calcular a área e o perímetro da representação; e conhecer os elementos utilizados para explicar seu entendimento acerca do conceito de triângulo.

Como resultado, constatamos as dificuldades dos participantes no manuseio das ferramentas do *GeoGebra*, além dos problemas relativos à organização de horários presenciais entre os pares, alguns dos quais realizaram toda a tarefa de forma *off-line,* o que não é recomendável.

7.2.3 PRIMEIRA TAREFA USANDO O CARTÃO DE ORIENTAÇÃO

Seguimos nessa etapa propondo questões diversificadas, envolvendo a temática Triângulo, vislumbrando a discussão de área e perímetro. Elaboramos 20 questões, distribuídas em duas listas de tarefas, presentes no Apêndice A (Tarefas 8 – 1 e 2), sendo todas as questões retiradas da Coleção *Para Viver Juntos: matemática* (OLIVEIRA, FUGITA, FERNANDES, 2011), do 6º ao 9º do Ensino Fundamental e da *Coleção Contextos e Aplicações* para o Ensino Médio (DANTE, 2000). Neste momento os alunos deveriam utilizar o cartão da BOA, elaborado nas oficinas, em duplas.

Também disponibilizamos a BOA em formato digital para os alunos que não participaram do momento presencial obrigatório, ao constatarmos que alguns alunos já haviam feito essa distribuição com alguns colegas, utilizando as redes sociais ou outros meios. A orientação dada para realização da tarefa está presente no Quadro 10.

Quadro 10: Primeira tarefa realizada com a BOA, em dupla

Tarefa 8 (modelos 1 e 2) *Aluno(a) (Executor):* ______________________________ *Matrícula:* _________ *Aluno(a) (Avaliador):* _____________________________ *Matricula:* _______ *Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolva-as utilizando o cartão com a Base Orientadora da Ação (BOA) que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo. Caso a dúvida ainda persista entrar em contato com a tutora presencial da disciplina.* *Obs:* ***Todas as questões foram retiradas de livros didáticos.***

Fonte: construção da pesquisadora

As 20 questões elaboradas sobre triângulos quaisquer, foram distribuídas na Tarefa 8 (Apêndice I) em duas listas disponibilizadas, em tempo real, para os grupos, via ambiente de aprendizagem *Moodle*. A distribuição das questões atendeu o conteúdo discutido, sendo: oito questões sobre a construção de triângulos quaisquer; cinco questões envolvendo o cálculo de área de triângulos quaisquer; duas envolvendo o cálculo de altura e área; três sobre a desigualdade triangular; uma sobre o cálculo do perímetro de triângulos quaisquer; e um item solicitando que a dupla elaborasse uma questão envolvendo o conteúdo explorado (triângulos).

Participaram da Tarefa 8 (1 e 2), 30 grupos, os quais apresentaram as seguintes respostas: quatro questões envolviam a construção de triângulos quaisquer e a obtenção de áreas. O baixo índice de acertos nessas questões (em torno de 25%) deve ter ocorrido por exigir dos grupos vários procedimentos na testagem dos passos apresentados na BOA, e demandar uma boa interação entre os alunos.

O índice de acerto nas questões que envolviam apenas a construção de triângulos foi, em média, de 65%; as questões que envolviam apenas o cálculo de área de triângulo foram em número de cinco, com uma média de acertos em torno de 75%. Duas questões envolviam o conhecimento do cálculo da altura e área de triângulos, sendo seu acerto, em média, igual a 55%. A questão sobre o cálculo de perímetro teve um percentual de acerto igual a 76%. A última questão pedia que a dupla elaborasse uma questão que envolvesse a discussão de triângulos quaisquer, com 88,5% delas tendo sido elaboradas adequadamente.

De modo geral obtivemos um índice satisfatório, em torno de 64% de acertos nessa etapa, apesar de muitos estudantes reclamarem da quantidade de tarefas a ser realizadas em um curto espaço de tempo (01 semana). Também reclamaram do encontro da dupla (horário a combinar para discussão dos itens, presencial ou não), e da realização de tarefas em dupla, o que ainda não havia sido feito no Curso.

Ao propormos a construção de um triângulo qualquer utilizando o *GeoGebra,* logo após a realização das oficinas, percebemos a necessidade de discutirmos os pontos em um plano cartesiano que podem formar triângulos, pois o desempenho dos estudantes na tarefa não foi satisfatório. Percebemos também que mesmo construindo a BOA, do tipo II, para o Ensino Fundamental, o processo deixou a desejar, pois esse conteúdo é comumente discutido no Ensino Médio.

Desse modo, sugerimos aos alunos ampliarmos a discussão do conteúdo de triângulos para o Ensino Médio, por meio de um fórum de discussões com base na seguinte questão: *Quais seriam os pontos no plano (x,y) necessários e suficientes para formarmos um triângulo qualquer? Será que quaisquer três pares ordenados servem? Como podemos propor uma BOA com o conteúdo triângulo para termos uma orientação completa?*

Apresentamos a proposta do fórum do ambiente de aprendizagem *Moodle,* sendo o estudante convidado a pensar sobre as questões e, em seguida, de forma *off-line*, enviar sua argumentação. A tarefa ficou disponível durante uma semana.

Em termos de conteúdos matemáticos, apresentamos alguns procedimentos utilizando matrizes três por três, segmentos de retas e pontos. Discutimos também alinhamentos de pontos e apresentamos os conhecimentos necessários para o entendimento da temática (Quadro 11).

Quadro 11: BOA para o conteúdo Triângulos no Ensino Médio

Base Orientadora da Ação – Área de Triângulos - Ensino Médio

Cartão construído com o professor e estudantes. Principais orientações para os estudantes:

Observar se existe uma figura fechada.
Identificar se existem três lados na figura.
Identificar se a figura possui três ângulos internos.
Identificar os valores dos lados e dos ângulos;
Verificar se a soma dos ângulos internos do triângulo totalizam 180º;
Verificar se a soma de dois lados da figura é maior ou igual ao terceiro lado. Realizar este experimento com todos os pares de lados. (Desigualdade triangular)
Identificar características típicas como área e perímetro da figura;
Existem os três lados fechados? Então é possível calcular sua área e perímetro independente de quaisquer medidas de seus ângulos internos utilizando a fórmula de Heron $A^2= [p.(p-a).(p-b). (p-c)]$. Onde
$p= (a+b+c)/2$.
Existe apenas a informação de dois lados, mas o triângulo é composto por um ângulo interno reto? Logo é possível utilizar o Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus lados ($a^2= b^2 + c^2$) para calcular um de seus lados. E utilizar a fórmula reduzida da área: $A = (b.h)/2$
Existe a informação de dois lados e um ângulo qualquer entre estes lados? Logo podemos usar a formula do Teorema das áreas: A área do triangulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por estes lados: $Área = \dfrac{c.b.sen\hat{A}}{2}$
Dado três pontos distintos verificar se estes não estão alinhamentos ($D \neq 0$);
Com os três pontos devemos calcular a distância da base: d(AB) e calcular a distância entre o vértice A e a reta suporte ao lado BC utilizando uma matriz 3 x 3 ou então utilizar a fórmula direta **A= 1/2 |D|**

$$\mathbf{D}= \begin{vmatrix} x1, y1, 1 \\ x2, y2, 1 \\ x3, y3, 1 \end{vmatrix}$$

Onde D é o determinante deve ser utilizado em módulo para encontramos a área; x1, x2 e x3 são os pontos da coluna das ordenadas e y1, y2 e y3 são da coluna da abscissas
Dar um título apropriado à figura, conforme suas características.

Fonte: Construção da pesquisadora

Em seguida lançamos o desafio presente no Quadro 12 para os participantes.

Quadro 12: Desafio para os estudantes sobre a construção da BOA para o Ensino Médio

Questão para responder: *Anteriormente foi pedido a você, estudante, que criasse com a ajuda do software GeoGebra, um triângulo qualquer, plotando pontos na malha do aplicativo ou utilizando já o triângulo pronto. Agora desejamos que você faça um triângulo qualquer no papel, a partir de três pontos distintos, escolhidos por você e que obedeça a lei de formação de triângulos, sendo necessário realizar todos os testes da BOA, já discutidos anteriormente.*
Coloque aqui os pontos e como você fez para calcular a área. Discuta como você prova que estes pontos formam um triângulo.
Obs.*: Atente para que os pontos não estejam alinhados, ou seja,* ***D*** *tem que ser diferente de zero. Caso você perceba outras possibilidades de ampliarmos a* ***BOA*** *completa para o* ***Ensino Médio (ou para o Ensino Fundamental)****, favor colocar sugestões aqui.*

Fonte: construção da pesquisadora

Trinta e quatro (34) estudantes participaram, individualmente, dessa tarefa. Os resultados foram os seguintes: 11 alunos (32,3%) não apresentaram os três pontos necessários para a formação de um triângulo qualquer na resolução da tarefa, como propúnhamos; 15 alunos (44,2%) apresentaram os pontos, porém, não verificaram se os mesmos formavam ou não um triângulo, afirmando apenas que eram vértices do mesmo; os oito alunos restantes (23,5%) calcularam o determinante da matriz gerada, encontrando o valor zero, concluindo que: "sendo assim: os pontos estão desalinhados, então, é possível calcular a área". A tarefa foi respondida de forma satisfatória por esses oito alunos, que realizaram todos os procedimentos necessários à sua execução. Na Figura 26 destacamos o comentário de um dos participantes e sua solução para o cálculo da área de um triângulo, usando a BOA.

Figura 26: Resposta do aluno 01 para tarefa do cálculo da área de triângulo usando a BOA para o Ensino Médio

Muito bacana. Cada dia aprendendo mais!

Usei os pontos: A(-5,1), B(5,-1) e C(1,7). D = 72 e $a = \frac{1}{2} * D$ = 36.

Para comprovar se estava certo desenhei 3 triângulos retângulos de forma que os lados que ligam cada ponto fosse a hipotenusa e usando o Teorema de Pitágoras. Descoberto o comprimento de cada lado utilizei a Fórmula de Heron para calcular a área.

Fonte: Aluno 01 da UFPB/ Virtual (2014)

Destaca-se, no comentário do aluno, seu entusiasmo na discussão do cálculo de área de triângulos quaisquer a partir de três pontos distintos. Outro estudante apresentou o passo a passo que percorreu no desenvolvimento da tarefa, que apresentamos na Figura 27.

Figura 27: Resposta do aluno 02 para tarefa do cálculo da área de triângulo usando a BOA para o Ensino Médio

Questão para responder: Anteriormente foi pedido a você, estudante, que criasse, com a ajuda do software Geogebra, um triângulo qualquer, plotando pontos na malha do aplicativo ou utilizando já o triângulo pronto. Agora desejamos que você faça um triângulo qualquer no papel, a partir de três pontos distintos, escolhidos por você e que obedeçam a lei de formação de triângulos, sendo necessários realizar todos os testes da BOA, já discutidos anteriormente.

Resposta:

Criei um triângulo equilátero a partir dos pontos A, B e C. A distância de AB = 10, de AC = 10 e de BC = 10.

Cada ângulo interno medindo 60°.

Vamos provar que esta figura satisfaz a BOA:

1 - Trata-se de uma figura fechada;

2 - A figura dispõe de três lados (AB, AC e BC);

3 - A figura possui três ângulos internos (alfa, beta e charle);

4 - Os valores dos lados e dos ângulos identificados (lados = 10 e ângulos = 60°);

5 - A soma dos ângulos internos do triângulo ABC, totalizam 180° (60° + 60° + 60° = 180°);

6 - A soma de dois lados e igual ou maior que o terceiro lado (10 + 10 = 20 > 10);

7 - Como a figura é uma figura fechado e conhecemos as medidas dos lados, então poderemos calcular a sua área e perímetro:

a) Área^2 = [p(p-a)(p-b)(p-c)], onde P é o semiperímetro e é igual a soma dos lados dividido por 2, ou seja,

P = 10+10+10/2 => P = 30/2 => P = 15.

Logo o semiperímetro é igual a 15cm

A^2 = [p(p-a)(p-b)(p-c)] =>

A^2 = [15(15-10)(15-10)(15-10)] =>

A^2 = [15(5)(5)(5)] =>

A^2 = 1875 =>

A = 43,30cm^2

Logo a área é igual a 43,30cm^2

b) Perímetro: O perímetro é igual a soma dos lados, ou seja: P = 10 + 10 + 10 => P = 30cm.

Logo o perímetro é igual a 30cm

Fonte: Aluno 02 da UFPB/ Virtual (2014)

Todos os participantes realizaram a tarefa que envolvia a testagem da orientação para o Ensino Médio, apresentando o conteúdo de triângulos quaisquer a partir de três pontos distintos, no plano. Essa etapa foi desafiadora para a maioria dos estudantes, pois envolveu muitos elementos novos para eles: o uso de aplicativos dinâmicos (nesse caso, o *GeoGebra*); a resolução e discussão de problemas diversos envolvendo diferentes níveis de complexidade, relativos a triângulos; a realização de trabalho em grupos; a construção da BOA, elencando todos os conceitos necessários e suficientes para o estudo de Triângulos. Esse conteúdo é, geralmente, apresentado aos alunos de forma fracionada, durante o Ensino Básico, sem a realização das retomadas necessárias de conteúdos anteriores envolvendo a temática.

Os alunos não indicaram sugestões para a complementação da BOA voltada para o Ensino Fundamental ou para o Ensino Médio, alguns deles afirmando que nunca tinham discutido os conteúdos explorados no formato apresentado, durante sua vida acadêmica, e desconheciam: *a fórmula de Heron, a fórmula de áreas que envolvem ângulos; o Teorema da desigualdade triangular; o alinhamento de pontos; e o a fórmula de área a partir do determinante.*

Aqui reafirmamos a necessidade de revermos a qualidade de nosso Ensino Básico que certifica todos os anos estudantes sem a formação adequada para resolverem problemas com o mínimo de complexidade. A realidade atual demanda que estejamos atentos ao analfabetismo funcional (MANSAGÃO, 2012), categoria adotada para denominar as pessoas que são certificadas com o Ensino Básico, mas que não conseguem resolver situações complexas.

De acordo com Vera Masagão, Coordenadora do Instituto Paulo Montenegro, que estuda o analfabetismo funcional no Brasil,

> [...] a chegada de novos estratos sociais às etapas educacionais mais elevadas vem, muitas vezes, acompanhada da falta de condições adequadas para que estes estratos alcancem os níveis mais altos de alfabetismo, o que reforça a necessidade de uma nova qualidade para a educação escolar, em especial nos sistemas públicos de ensino. Outro fator essencial para avançar é o investimento constante na formação inicial e continuada de professores, que precisam ser agentes da cultura letrada em um contexto de inovação pedagógica. (MANSAGÃO, 2012, p. 3)

A autora ainda complementa seu pensamento afirmando que a qualidade da educação não envolve apenas conteúdos didáticos escolares

> [...] não envolve somente a quantidade de horas de estudo ou a ampliação da quantidade de conteúdos ensinados, mas também fatores como a adequação das escolas e dos currículos a políticas intersetoriais que favoreçam a permanência dos educandos nas escolas e a criação de novos modelos flexíveis que permitam a qualquer brasileiro ampliar seus estudos quando desejar, em diferentes momentos da vida (MANSAGÃO, 2012, p. 3).

As palavras da autora nos remetem a pensar em formas flexíveis de garantir o acesso dos estudantes ao conhecimento, em qual seja a etapa da vida. Isto nos faz pensar no ensino a distância que pode possibilitar o acesso do estudante ao conhecimento independente de idade, renda ou categoria social.

Desta forma, as tarefas desta etapa foram realizadas no período de três semanas consecutivas. Ao final, consideramos que os resultados obtidos na etapa material ou materializada foram, de forma geral, satisfatórios.

7.3 LINGUAGEM EXTERNA: Verbalização

Após a discussão da etapa materializada, desenvolvemos as tarefas da etapa verbalizada. A etapa da Linguagem Externa utiliza a verbalização como parâmetro principal. Talizina (2000) indica que nessa etapa podemos também usar a escrita para avaliar o nível de complexidade desse elemento do processo. Deste modo elaboramos duas tarefas contendo três questões em cada tarefa (Apêndice I), para serem resolvidas em dupla.

As questões foram retiradas de livros do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, de livros do Ensino Médio e de exames de avaliações do MEC (BRASIL, 2006; 2013), com nível de complexidade mais alto que as anteriores e envolviam o conteúdo de área e perímetro de triângulos quaisquer, sendo assim distribuídas: 02 questões sobre área de triângulos a partir de três pontos no plano; 01 questão sobre perímetro; 02 questões sobre área a partir de representações; e 01 questão sobre a existência de triângulos quaisquer a partir de ângulos internos, de medidas dos lados e de suas representações. Ao final, os estudantes deveriam registrar todos os procedimentos empregados, de acordo com as orientações apresentadas no Quadro 13.

Quadro 13: Orientação para realização da tarefa de verbalização envolvendo triângulos quaisquer

Tarefa 9 Aluno(a) Executor(a): _______________________ Matrícula: _________ Aluno(a) Avaliador(a): _______________________ Matricula: _________ Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolvê-las, de **forma detalha (passo a passo), em dupla (participando os dois estudantes), sem a utilização do cartão** com a Base Orientadora da Ação (BOA), que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina, em grupo. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas que forem surgindo devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo, de modo que cada estudante entenda o raciocínio do outro. Caso a dúvida ainda persista o grupo deve entrar em contato com a tutora da disciplina.

Fonte: Construção da pesquisadora

Para essa etapa de verbalização, conforme orientação apresentada no Quadro 12, solicitamos que os estudantes não recorressem a orientações externas, contando, para isso, que os alunos iriam atender a essa solicitação, uma vez que não temos como retirar as orientações da BOA de forma externa, pelo fato de as tarefas estarem sendo propostas via ambiente de aprendizagem. Nesse momento as orientações externas não foram disponibilizadas, o que já havia sido feito anteriormente por meio digitalizado e impresso. Esta retirada total externa é impossível de fazer em ambientes virtuais, assim como a medição exata de tempo da realização de cada tarefa e o controle em tempo real.

Participaram da realização dessa tarefa 36 grupos, com os seguintes resultados: 75% dos estudantes responderam de forma satisfatória a questão sobre perímetro; 40,0% dos estudantes responderam de forma satisfatória as questões que envolviam área a partir das representações oferecidas; 75% dos estudantes responderam de forma satisfatória as questões sobre área que envolviam os vértices do plano; e por último, 50% dos estudantes acertaram o item que envolvia três representações e a prova da existência (ou não) dos triângulos dados, conhecendo-se os ângulos internos, as medidas de seus lados e suas representações.

Optamos nesse momento pelos registros escritos dos estudantes enviados em arquivo *off-line*, no prazo de uma semana. Os estudantes deveriam apresentar o detalhamento das questões ao invés de sua verbalização oral, por não termos como fazer isso com todos os grupos participantes, em tempo real. Ao final consideramos o resultado satisfatório, com uma média de 60% de acerto.

7.4 ETAPA DA LINGUAGEM INTERNA: para si

Nessa etapa o estudante foi orientado a realizar uma série de tarefas, menos diversificada que as anteriores, de forma individual, em silêncio, sem o auxílio de orientações externas, com um maior nível de complexidade, utilizando os conhecimentos já adquiridos (Apêndice A).

As tarefas continham quatro itens assim distribuídas: o primeiro envolvia a construção de triângulos a partir de um experimento com dobraduras de papel. O estudante era convidado a realiza-lo e, ao final, calcular a área dos triângulos produzidos. No segundo item era dada uma representação de um triângulo cercado por regiões quadradas, solicitando-se o valor da área do triângulo, a partir dos dados fornecidos. No terceiro item, apresentávamos três triângulos distintos para que o estudante decidisse qual (ou quais) representação(ões) estava(m) correta(s) (ou não). No último item, a partir da indicação de três pontos no plano cartesiano, o estudante deveria decidir se eles poderiam constituir os vértices de um triângulo e qual seria sua abscissa já que a área era informada (Apêndice A).

Nessa etapa participaram 56 estudantes, com os seguintes resultados: a maioria dos estudantes (60,7%) conseguiu realizar o experimento com dobraduras, identificando corretamente o valor das áreas solicitadas. Na resolução do item dois, a maioria dos alunos (82,2%) calculou corretamente a área da região indicada. O terceiro item apresentou o menor índice de acertos (51,7%), mesmo a questão já tendo sido proposta em etapas anteriores. Os estudantes continuaram cometendo erros, por não observarem todos os elementos da questão. O índice de acerto no último item da tarefa foi de 82,2%.

De modo geral, os alunos conseguiram construir triângulos quaisquer, verificar a sua área a partir de seus lados, de seus vértices, mas ainda não conseguiram perceber todas os elementos necessários e suficientes para a obtenção de um triângulo. Obtivemos uma média geral de 70% de êxito dos estudantes nessa etapa.

7.5 ETAPA MENTAL: a Criatividade

Nessa etapa os estudantes deveriam realizara a tarefa proposta de forma individual, sem a ajuda externa, em silêncio. A tarefa, presente no Quadro 14, demandava um pouco de criatividade em sua execução, sendo nosso objetivo que o estudante apresentasse uma proposta de questão diferenciada das que foram propostas durante as aulas.

Quadro 14: Tarefa criativa

Aluno (a): ____ Matrícula: ___________

*A tarefa abaixo deverá ser realizada **individualmente** pelo estudante, **de forma detalhada**, **sem ajuda da BOA**, e deve envolver os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos quaisquer. Desejamos nesta tarefa identificar a sua criatividade sobre a temática em questão.*

A Unidade IV do nosso livro texto oferece vários tipos de jogos e atividades que podem ser realizadas em sala de aula sobre temática da Geometria. Você poderá consultar a Unidade IV, site da internet, livros e outros materiais didáticos para realizar adaptações e elaborar a sua tarefa, contanto que a sua proposta seja original. Caso percebamos cópia idêntica desta tarefa em sites ou outros materiais, sua tarefa será anulada.

Você deve apresentar um jogo ou uma tarefa didática (resolução de problema, construção, problema histórico, dentre outros), que envolva o conteúdo de área e/ou perímetro de triângulos quaisquer, possível de ser aplicado em uma sala de aula do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. A proposta pode ser baseada em uma atividade já existente, mas você deve fazer alterações originais que demonstrem a sua criatividade na discussão do conteúdo matemático proposto. Escolha um nome para a sua atividade criativa e responda aos itens que seguem. Você pode fotografá-la e/ou filmá-la, usar computadores, calculadoras, cortar papel, ... e enviá-las também no seu arquivo. Seja criativo! Apresente também o Nome da tarefa; Ano adequado; conteúdo explorado; Material utilizado; Procedimentos; e Avaliação.

Fonte: Construção da pesquisadora

Participaram da etapa mental 55 alunos, com os seguintes resultados: 30,9% obtiveram índices insatisfatórios, por não desenvolverem uma proposta de acordo com o que foi pedido; 34,5% realizaram a tarefa de forma parcialmente satisfatória, tendo 27,3 % envolvido o conteúdo (área e perímetros de triângulos) de modo adequado, mas sem incorporar elementos novos; e apenas 7,3% realizaram a tarefa de forma criativa, como propunha a tarefa.

A respeito da criatividade, Resende e Valdez (2006) afirmam que uma das críticas levantadas ao modelo da Teoria proposta por Galperin (2009) é que

> [O] modelo formativo-conceitual, preocupado em desenvolver um método eficaz de resolução de problemas, deixa de favorecer o desenvolvimento do pensamento criativo. Esta é a única crítica que Galperin (1989c, p. 80) reconhece como pertinente, não apenas como uma insuficiência do método formativo-conceitual, mas também em

> função da indefinição do conceito de criatividade e a falta de compreensão de suas características pela ciência. (RESENDE, VALDEZ, 2006, p. 1228).

Resende e Valdez (2006) afirmam ainda que Galperin estava propondo uma sexta etapa em seu modelo formativo-conceitual em busca de reformular sua teoria, cabendo aos seus colaboradores analisarem e avaliarem essa possibilidade.

Como estamos discutindo conteúdos didáticos obrigatórios da Educação Básica com estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, devemos prezar para que eles o dominem adequadamente. Com base nesse foco, realizamos a etapa da Linguagem Interna desafiando os estudantes a elaborarem uma questão possível de ser aplicada em sala de aula, envolvendo a temática em tela, mas apenas 35% dos estudantes realizaram esta tarefa de modo aceitável. Isto caracteriza uma baixa formação da ação criativa dos estudantes participantes, fato este preconizado por Resende e Valdez (2006) em seus estudos.

Ao final da disciplina solicitamos que os estudantes descrevessem, de forma detalhada, as principais discussões da disciplina e sua concepção sobre o modo como ela foi desenvolvida, em uma questão aberta e não obrigatória. Participaram dessa etapa, 41 alunos. Desse total, 29 estudantes não fizeram a descrição da disciplina com riqueza de detalhes, como pedido; enquanto os demais realizaram uma descrição detalhada da disciplina, evidenciando os principais momentos.

7.6 CONTROLE: Aferição de Retorno

A última fase foi compreendida pela etapa mental, após a qual realizamos a aferição de controle. Neste momento propomos uma tarefa com cinco itens, a ser realizada de forma individual, sem nenhuma consulta, no tempo determinado de duas horas. A tarefa foi realizada de forma presencial, sendo acompanhada pelos tutores dos polos de cada município.

A tarefa envolveu a aferição de retorno, que foi a etapa de controle. É indicado que esse controle seja realizado ao final de cada etapa do processo de assimilação da ação, o que fizemos por meio de *feedbacks* realizados pela tutoria, quando é feita a correção de todos os itens e colocadas observações acerca de cada procedimento, indicando o que o estudante errou e como deveria ter realizado o item.

Não foi possível realizar novas tarefas nos casos em que o estudante não alcançou os resultados desejados, o que é indicado pela Teoria, em razão da carga horária eu dispomos para desenvolvimento do trabalho com o conteúdo, dessa forma, decidimos realizar a aferição de controle comtemplando cada etapa do processo apenas no final da disciplina. Talizina (2000) recomenda que o controle seja sistemático, em cada tarefa a ser realizada. O controle externo deve ser episódico: de acordo com o pedido do aluno ou diante da presença de erros constantes, tendendo a diminuir no decorrer do processo. Também realizamos no momento da organização dos estudantes em grupo o controle entre pares.

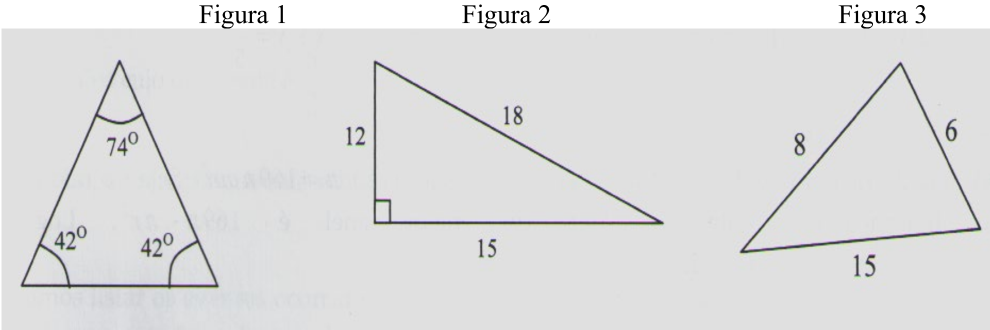
Partindo desse princípio, realizamos a aferição de controle de todas as etapas (criação, materializada, linguagem externa, linguagem interna e mental) ao final da disciplina, de modo presencial, em todos os polos, para averiguação de conhecimento do estudante, com duração de 120 minutos, sendo o processo acompanhado pelos tutores presenciais de cada polo, com a participação de 65 estudantes.

Elaboramos uma tarefa escrita, compostas por cinco itens, cujo objetivo era avaliar o conhecimento dos estudantes sobre elementos explorados anteriormente, em cada etapa do processo:

- **Etapa de criação: construção da BOA**: (construção do professor com os estudantes). A primeira questão avaliava o conhecimento do estudante com relação a construção da BOA: *Nesse período discutimos muitas questões envolvendo conceitos geométricos. Construímos a Base Orientadora da Ação – BOA. Logo, esboce os itens que compõe a BOA para o Ensino Fundamental. Estes itens devem representar as características essenciais e relevantes do conteúdo matemático de área de triângulos quaisquer.*

- **Etapa materializada** (grupo/ com orientação / 20 questões diversificadas). A segunda questão verificava a etapa materializada com a seguinte proposta: *Quais as figuras estão corretas? Justifique a sua resposta.*

Figura 1 Figura 2 Figura 3



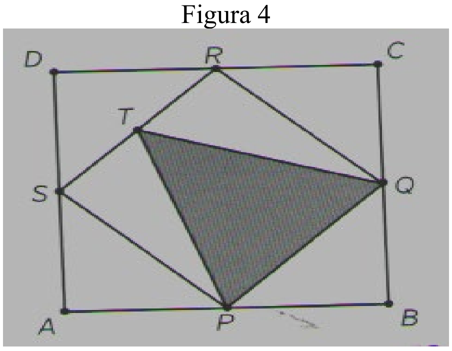
Fonte: Construção da pesquisadora

- **Etapa da Linguagem externa** (grupo/ sem orientação/ tarefas diversificada/ 20 questões). A terceira questão remetia a verificação da etapa verbal com a seguinte situação: *Resolva a seguintes questões: Um fazendeiro queria cercar uma região plana* *triangular para plantar verduras. Sabendo que os lados da região medem 3 m, 4 m e 10 m, determine a área aproximada da região destinada ao plantio de verduras.*

- **Etapa da Linguagem interna** (individual/ de um só tipo/ sem orientação externa /6 questões). A quarta questão verificava a etapa mental a partir de duas situações distintas:

  a) *Na figura 4, o quadrado ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Pergunta-se: Qual á área do triângulo PQT?*

Figura 4



Fonte: Adaptado de OBMEP (2006)

  b) *Elabore um problema que, para ser resolvido, seja necessário utilizar a Fórmula de Heron. O problema deve remeter a um contexto coerente do seu município. Apresente a resolução da questão.*

- **Etapa mental** (individual/ sem orientação externa/ um único tipo). A quinta e última questão verificava a elaboração de situações inovadoras proposta pelo estudante diante dos conteúdos estudados. Você deve apresentar um jogo (ou uma tarefa didática) que envolva o conteúdo de área e/ou perímetro de triângulos quaisquer, possível de ser aplicado em uma sala de aula do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Use sua criatividade! (Apresentar: Nome da tarefa; Ano adequado para sua utilização; Conteúdo explorado; Material utilizado; Procedimentos; Avaliação).

Os resultados obtidos foram os seguintes: 33 alunos apresentaram, de forma satisfatória, as principais características (necessárias e suficientes) para o trabalho com o conteúdo no Ensino Fundamental; 34 alunos responderam de forma satisfatória a etapa materializada; 44 alunos responderam a etapa da linguagem externa de forma satisfatória; 49 responderam de forma satisfatória a etapa da linguagem interna; e 45 responderam, também de forma satisfatória, o item relativo à etapa mental.

Quanto aos resultados gerais dos 34 estudantes que participaram das oficinas temáticas nos cinco polos presenciais, apenas um abandonou a disciplina e 22 foram aprovados por média, logo. Temos como resposta da aferição de controle que: 23 alunos realizaram a BOA de forma satisfatória, apresentado suas principais características; 27 deles responderam de forma satisfatória a etapa materializada; 19 alunos responderam a etapa da linguagem externa de forma satisfatória; 21 alunos responderam de forma satisfatória a etapa da linguagem interna; e 25 alunos responderam de forma satisfatória, a etapa mental.

Ao compararmos os dois grupos (os estudantes que participaram das oficinas didáticas e da construção inicial da BOA e o de estudantes que não participaram) concluímos que os estudantes que participaram das oficinas apresentaram um alto grau de compromisso com a sua aprendizagem, realizando as tarefas nos prazos indicados, em todos os momentos do processo. A disponibilidade foi evidenciada na maioria dos estudantes que participaram do momento presencial. Outro fato observado foi a ampliação da qualidade da escrita de vários estudantes, em termos de coerência lógica, sendo observados problemas graves dessa ordem nos semestres anteriores, com outros estudantes da disciplina que lecionamos.

Sabemos que a essência da Teoria da Atividade surgiu com base na discussão marxista, de cunho histórico cultural, pautada em vários movimentos dialéticos que constituem a base principal da assimilação dirigida, tais quais os pares: ação – mental; interno - externo; ação - objeto; verbal- interno; concreto – abstrato; conceito- ação. Assim, o que podemos destacar de favorável, ou não, na perspectiva pedagógica e psicológica, acerca da natureza do estudo, ao fim da pesquisa? Nossas principais considerações serão aqui destacadas. A primeira delas é que, apesar de serem explorados conteúdos relacionados a triângulos desde os anos iniciais da Educação Básica, perpassando praticamente todos os anos de escolaridade, sua apreensão não é adequada, o que afirmamos com base nos estudos que destacamos e em nossa pesquisa, na etapa diagnostica, na qual identificamos as lacunas da maioria dos estudantes em relação a esse conhecimento.

O programa didático que foi planejado, elaborado e executado na pesquisa ajudou, durante todo o processo, os estudantes que participaram de todas as suas etapas, ou seja, a dinâmica de fato ajudou ao êxito dos participantes que conseguiram realizar grande parte das tarefas. Entendemos que as orientações dadas durante todo o processo favoreceu a discussão do conteúdo.

Em virtude da dinâmica da EaD, não foi possível controlar o uso do cartão (ou não) de forma externa durante os procedimentos das tarefas, fato este que julgamos não ter comprometido os resultados, pois os alunos foram orientados quanto ao uso correto do cartão sempre que isso se fez necessário.

Os estudantes da EaD não estão habituados a realizarem um grande número de tarefas sobre a mesma temática, o que compreendeu um elemento novo para eles. Geralmente as atividades relativas a um conteúdo especifico são realizadas uma única vez na disciplina, em virtude da extensão das ementas das disciplinas e da carga horária disponível. O material elaborado para as disciplinas da EaD, apesar de ser dirigido ao estudante, é muito resumido e específico, sendo indicada sua organização para a formação de conceitos relevantes e necessários para todos os componentes curriculares do Curso.

Outro ponto relevante foram os problemas na formação dos grupos, em razão de abandono da disciplina ou conflitos pessoais, mas eles foram contornados com a redistribuição de membros dos grupos. Dois grupos tiveram que ser convertidos em dois trios, pois o número de alunos matriculados na disciplina era ímpar (97) e porque tínhamos dois polos com penas três estudantes participantes.

Não pudemos realizar novas tarefas ao fim de cada etapa de controle do processo, como seria desejável, pela dinâmica da EaD, que não viabiliza o acompanhamento presencial e em tempo real dos alunos. Optamos por realizar a aferição de retorno, de forma presencial, nos polos dos estudantes, apenas no final do semestre, utilizando uma avaliação escrita, onde o aluno foi convidado a se manifestar sobre cada etapa. Essa aferição foi acompanhada pelos tutores presenciais de cada polo.

Algumas dificuldades ocorreram com relação a dinâmica da EaD em algumas etapas do processo, principalmente nas finais. Por exemplo, ao percebermos erros nas tarefas dos estudantes, eles eram informados através de *feedback enviado pela tutoria*, semanalmente, mas não havia tempo hábil para realizarmos uma nova tarefa com os estudantes que apresentaram alguns problemas nas etapas do estudo.

Talizina, Solovieva e Rojas (2010) sugerem, em seus estudos, a realização de várias tarefas, em torno de 200, a serem realizadas em um período de 8 meses consecutivos, na discussão dos sistemas didáticos, de forma presencial, considerando regimes de ensino em uma estrutura anual. Essas orientações precisaram ser adaptadas, pela própria dinâmica da EaD e em virtude de nosso semestre letivo ter apenas quatro meses de duração. Além disso, a disciplina contém ainda, em sua ementa, uma introdução à linguagem algébrica.

Outro fator limitador foi o fato de, apesar de usarem o *GeoGebra* deste os primeiros semestres do Curso de Licenciatura, muitos estudantes não saberem utilizar esse *software*, o que trouxe algumas alterações no nosso planejamento inicial, pois partimos do pressuposto básico que todos dominariam suas ferramentas básicas.

Quanto às tarefas, especificamente, alguns pontos merecem reflexão, em se considerando a especificidade do ensino a distância. Quando utilizamos os cartões não podemos garantir que todos os estudantes os utilizaram de forma adequada (no devido tempo; sempre que solicitado; quando não recomendado). Em razão de nossa experiência docente, acreditamos que a maioria cumpriu as orientações. Além do mais, partimos do pressuposto de que nossa relação com os estudantes precisa ser de confiança, principalmente no caso em que formamos futuros educadores.

Alguns fatos ocorreram durante o período e desfavoreceram os trabalhos em grupos: alunos ficaram doentes e solicitaram afastamento temporário, outros realizaram as tarefas individualmente (caso de uma aluna afastada por motivo de gravidez); vários alunos, apesar de matriculados na disciplina, a abandonam logo nas primeiras semanas do curso, o que implicou na necessidade de reagrupamento de estudantes; e baixa frequência dos estudantes nos encontros presenciais. Esses dois últimos fatos ocorrem, em igual medida, nas demais disciplinas de nosso Curso de Licenciatura.

De maneira geral, concluímos que os alunos com rendimento escolar médio ou bom foram motivados pela dinâmica da disciplina e realizaram as tarefas com satisfação, segundo expressaram em seus comentários. Como era esperado, ocorreram reclamações dos estudantes em relação ao número de tarefas propostas, argumentando que tinham também tarefas de outras disciplinas para realizar no mesmo período. Vale ainda ressaltar com relação a este fato que, como muitos de nossos estudantes trabalham em suas regiões, as tarefas são realizadas por estes apenas nos finais de semana.

Constatamos que o uso do cartão de orientação motivou ainda mais os alunos que já tinham compromisso com sua aprendizagem, entendendo que faltava, para esses estudantes, orientações sobre como organizar de forma coerente e lógica seu pensamento, isto ocorreu com a apresentação do conteúdo, de forma diferenciada. Verificamos também um maior êxito na disciplina por parte dos estudantes que realizaram a maioria das tarefas propostas.

Outro ponto positivo observado foi o controle realizado entre os pares, o que estimula a interação entre os estudantes e a formação de grupos de estudo. Com essa dinâmica, diminuiu o número de dúvidas apresentadas ao tutor e ao professor, já que muitas eram dirimidas com a discussão com o colega, mesmo estando os professores e tutores disponíveis e bastante presente durante todo tempo de aplicação da Teoria.

Os resultados avaliativos dos 97 estudantes matriculados na disciplina de TEM II ao final do semestre letivo de 2014.1, considerando todas as tarefas realizadas no semestre, e a discussão envolvendo Álgebra e Geometria foram os seguintes: aprovados - 46 alunos (47,4%); reprovados - 21 alunos (21,6%); desistentes - 30 alunos, (31%). O percentual de alunos que não alcançaram sucesso na disciplina (52,6%) ficou na média do esperado com relação os semestres anteriores. Destacamos neste momento que percebemos um maior empenho dos estudantes que conseguiram êxito e que participaram da maioria das tarefas, ao fim do semestre.

Apenas 34 estudantes participaram da última etapa da pesquisa, relativa à verificação do padrão qualitativo caracterizado pela solidez da ação, pois, apesar de terem sido aprovados 46 alunos, 12 não apresentaram rendimento satisfatório no decorrer da pesquisa, participando dos exames finais da disciplina.

7. 7 DEPOIMENTOS DOS ESTUDANTES SOBRE A PROPOSTA DE TRABALHO

No final do semestre letivo realizamos um fórum com todos os participantes da disciplina, com o objetivo de levantar suas concepções acerca da dinâmica adotada. O roteiro de questões do Fórum está presente no Quadro 14, e envolvia o levantamento da opinião dos participantes em relação ao funcionamento dos grupos, sobre as dificuldades que tiveram e, ao final, solicitamos que apontassem sugestões que pudessem contribuir para o processo de organização do trabalho em grupos. Vale lembrar que essa estratégia nunca havia sido adotada em nosso Curso, em nenhuma outra disciplina.

Quadro 15: Proposta para avaliação dos grupos ao final da disciplina

Estamos chegando ao final de nossa caminhada neste período. Desejamos saber de você qual a sua avaliação sobre os grupos que foram formados na disciplina. Responda neste fórum:

a) Como funcionou o seu grupo?

b) As tarefas foram bem divididas e conferidas por todos os participantes do grupo?

c) Esta dinâmica permitiu-lhe uma maior compreensão dos conteúdos e/ou maior interação com o colega da turma?

d) Atribua uma nota para o trabalho em grupo que sua equipe desenvolveu?

e) O que foi mais difícil para você nesta disciplina?

e) Este espaço é para sugestões de como melhorar o processo dos grupos, se desejar (optativo).

Fonte: Construção da pesquisadora

Considerando nossa solicitação, com o roteiro apresentado no Quadro 15, os estudantes se manifestaram apresentando sua opinião. Na maioria dos casos, foram favoráveis à dinâmica adotada na disciplina. Os depoimentos de três estudantes estão destacados nos Quadros 16 a 17.

Quadro 16- Resposta do aluno 01

a)Como funcionou o seu grupo?

R/ Com bastante interação.

b) As tarefas foram bem divididas e conferidas por todos os participantes do grupo? R/ Sim.

c) Esta dinâmica permitiu-lhe uma maior compreensão dos conteúdos e/ou maior interação com o colega da turma?

R/ Com certeza.

d) Atribua uma nota para o trabalho em grupo que sua equipe desenvolveu? R/ Próximo da nota máxima.

e) O que foi mais difícil para você nesta disciplina?

R/ Fora as oficinas que não pude participar, o resto foi muito bom e proveitoso.

e) Este espaço é para sugestões de como melhorar o processo dos grupos, se desejar (optativo).

R/ Na minha opinião não precisa melhorar nada, dessa forma foi muito bom

Fonte: Aluno 01

Muitos estudantes respondem a questões abertas de maneira breve, como no caso destacado (Aluno 01). No caso desse aluno, a maior dificuldade, expressa por ele, foi a não participação nas oficinas presenciais. Entendemos que, em sua opinião, essas atividades poderiam tê-lo situado melhor em relação à dinâmica dotada na disciplina.

Quadro 17- Resposta do aluno 02

a) Como funcionou o seu grupo?

Bem, um respondia uma parte da tarefa e o outro corrigia para ver se não tinha nada de errado, depois, era a vez do outro responder a outra parte, para depois o outro corrigir.

b) As tarefas foram bem divididas e conferidas por todos os participantes do grupo?

Sim. Todas elas foram bem divididas e conferidas pelos participantes.

c) Esta dinâmica permitiu-lhe uma maior compreensão dos conteúdos e/ou maior interação com o colega da turma?

Sim, pois, a interação em grupo, nos leva a compreender melhor os conteúdos, pois, um tira a dúvida do outro.

d) Atribua uma nota para o trabalho em grupo que sua equipe desenvolveu? 9.5

e) O que foi mais difícil para você nesta disciplina?

O tempo para responder as tarefas, pois, temos outras disciplinas mas complicadas que precisam de muito tempo para entender e responder suas atividades e o tempo é pouco, já que o tempo se torna pouco, devido o trabalho levar o dia quase todo, deixando só a noite para estudar. A falta de um professor presencial para nos orientar. A falta de compreensão da professora por tirar pontos da prova presencial devido o aluno não participar da aula presencial, mesmo sabendo que não foi culpa do aluno.

f) Este espaço é para sugestões de como melhorar o processo dos grupos, se desejar (optativo). Não tenho nenhuma sugestão.

Fonte: Aluno 02

Apesar de, em geral, apresentarem respostas breves às questões abertas, os estudantes não costumam deixar de fazer críticas quando surgem problemas nas disciplinas. Essas reivindicações são, inclusive, em geral mais contundentes do que por parte dos estudantes dos cursos presenciais.

Quadro 18- Resposta do aluno 03

Segue minhas respostas as perguntas:

a) Tentamos nos comunicar assim que as tarefas eram liberadas, através de mensagens ou telefonema, para decidirmos quem ficaria com qual parte. Após essa decisão tomada cada um fazia a sua e enviava para o outro colocar comentários ou mesmo ajudar no entendimento ou no caso de equívocos, sempre por e-mail e com as informações todas colocadas na própria tarefa. Após idas e voltas, quando não se tinha mais nada a acrescentar, enviamos as tarefas.

b) Sim, as duas tarefas de cada semana eram bem equilibradas e sempre fazíamos as duas, para poder comentar a tarefa do colega do grupo.

c) Nossa interação já era boa mesmo antes das tarefas mas aprendi coisas bem interessantes sobre os temas abordados.

d) Não poderia dar nota inferior a 10.

e) Conciliar as atividades com as demais disciplinas. Principalmente nas tarefas em dupla, terminei fazendo duas tarefas na mesma semana e para isso utilizei tempo que era programado para outra disciplina.

f) Manter um número menor de questões, assim como foi feito nesta ultima, nos trabalhos de grupo, para não nos prejudicar nas demais disciplinas, e os trabalhos em equipe sempre precisam de um pouco mais de tempo, pois há muitos desencontros e após os acertos há muitas idas e vindas dos arquivos até chegarmos à conclusão. O tempo curto termina nos impelindo a pensar menos sobre os problemas propostos e acabamos cometendo erros que poderiam não ocorrer.

Nós que agradecemos, professora!

Fonte: Aluno 03

Concluímos, a partir dos depoimentos dos estudantes, a exemplo dos aqui destacados, que os alunos compreenderam a importância da discussão em sua formação profissional, o que, esperamos, seja valorizado em suas futuras salas de aula. Se nas orientações educacionais (BRASIL, 1998), recomenda-se que o professor adote o debate de ideias com seus alunos, entendemos que é preciso que vivenciem experiências, em sua formação inicial, que os faça compreender as potencialidades dessa interação entre pares.

De modo geral, consideramos satisfatório e relevante o trabalho voltado para o desenvolvimento dos grupos, apesar das dificuldades impostas pela realidade da Educação a Distância no Brasil. Os entraves que os estudantes tiveram ao tentar organizarem-se nos grupos, com relação ao tempo e horários disponíveis, e também com relação à verificação e entrega das tarefas, implicaram na necessidade de desenvolverem aspectos psicológicos favoráveis, como a atenção; a responsabilidade com prazos; a solidariedade e respeito ao próximo, necessários a uma prática cidadã de qualidade.

Acreditamos que o processo escolar deve se organizar não apenas para os estudantes obterem respostas corretas, mas para ensiná-los efetivamente os conhecimentos que conduzem a essas respostas e a valorizar os processos que vivenciam nesse caminho, e o professor só pode ajudar a formar adequadamente o estudante se planeja, elabora, controla (de forma sistemática), suas ações didáticas no momento necessário e com a frequência devida. O professor deve atentar para o modo como o aluno realiza (ou não) uma ação e como esta ação se forma (ou não) considerando sua automatização, rapidez na execução, dentre outros (TALIZINA, 2000).

Uma pergunta que surge, imediatamente, diante do exposto, é: *como implementar essa proposta em turmas numerosas de estudantes, como foi o caso dos participantes do curso de Licenciatura em Matemática a distância de nosso estudo?* Talizina (2000) afirma que o uso de computadores pode ser uma das alternativas possíveis, neste caso. A elaboração de registros contendo todas as informações sobre as tarefas realizadas pelos estudantes facilita o controle de suas ações, o que foi feito em todos os momentos da pesquisa. O ambiente de aprendizagem *Moodle* possibilita o registro de todas as tarefas dos alunos, com riqueza de detalhes, o que auxilia em todas as etapas do processo.

7.8 VERIFICAÇÃO DA RETENÇÃO DO CONCEITO

Dois meses após a realização da última tarefa discutida com os participantes do estudo, foram propostas novas tarefas aos mesmos estudantes, com o intuito de verificarmos a retenção do conceito de triângulo nos estudantes participantes da pesquisa. Esta tarefa foi realizada no período subsequente (2014.2), em outra disciplina (TEM III), após um mês de execução do novo curso (início de setembro/2014), sob orientação de outros profissionais do Curso.

Participaram da última etapa de verificação do qualitativo da ação 62 estudantes de 71 matriculados na disciplina de TEM III, do período 2014.2. Deste público (62) apenas 34 estudantes cursaram a disciplina de TEM II no período anterior, ou seja, os participantes aptos a serem avaliados eram apenas 34 dos 71 estudantes matriculados na disciplina atual.

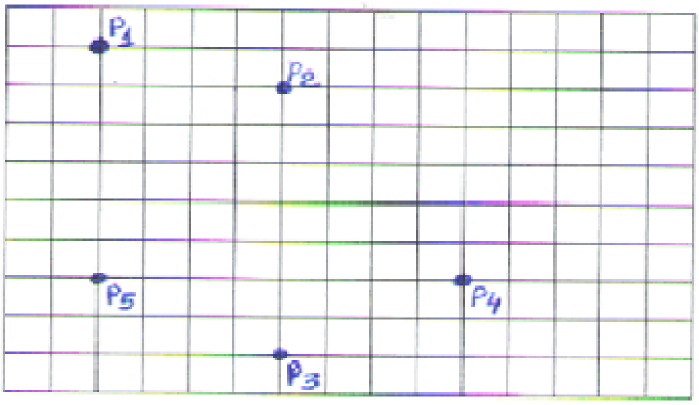
Foram elaboradas duas questões, com nível de complexidade superior às apresentadas na disciplina, aplicadas a duas áreas diferentes de conhecimento: construção civil e Química, ambas envolvendo o mesmo elemento do conteúdo (Figura 28).

A primeira questão fez parte do processo seletivo da Universidade Federal de Natal (UFRN, 2008), sendo demandados conhecimentos de distância entre dois pontos; transformação de medidas; cálculo da área de um triângulo retângulo e de um triângulo irregular. A segunda questão evidenciava três moléculas cujas extremidades, ao serem sobrepostas, poderiam formar ou não uma figura cuja área podia ser (ou não) calculada. Nesse momento desejávamos levantar se os invariantes trabalhados na disciplina, relativos ao estudo de triângulos, foram internalizados pelos alunos.

Figura 28 – Avaliação qualitativa da ação e do conceito

1 - (Adaptada de UFRN, 2008) O piso de um salão de 4 m de largura por 6 m de comprimento é revestido com pedras de granito quadradas, como mostra a figura abaixo. Em cada uma das posições P1, P2, P3, P4 e P5 existe uma pessoa.

Figura 01- Piso de granito do salão



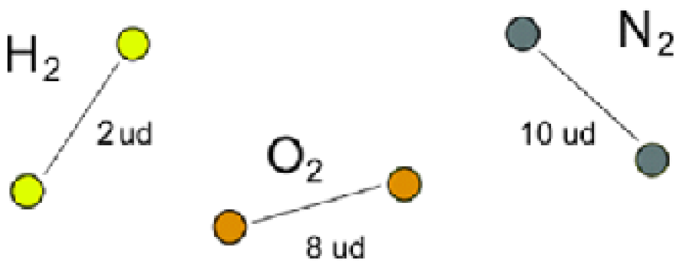
Com base nesta assertiva, responda:

a) Qual a distância entre as pessoas que estão nas posições P2 e P3? Justifique sua resposta.

b) Qual a distância entre as pessoas que estão nas posições P3 e P4? Justifique a sua resposta.

c) Qual a área interna da região do piso delimitada pelas pessoas P1, P2 e P4? Justifique a sua resposta.

2 - Na figura abaixo estão representadas moléculas dos gases hidrogênio, oxigênio e nitrogênio com as respectivas distâncias entre seus átomos em unidades de distâncias (ud). Calcule a área da região plana que podemos obter com as moléculas supondo que estas se unam por superposição das suas extremidades.



Fonte: Construção da pesquisadora

Os resultados obtidos com os 34 estudantes participantes foram os seguintes: 16 alunos (47%) que acertaram a tarefa diagnóstica (segundo item), no início do período 2014.1, continuaram obtendo bons resultados nas questões mais complexas, após os dois meses de conclusão da disciplina; 12 alunos (35,3%) que erraram a tarefa diagnóstica no início do período 2014.1, acertaram as questões do novo teste, ou seja, houve uma evolução com os estudantes com relação ao conteúdo discutido; 03 alunos (8,8%) que erraram a tarefa diagnóstica, também erraram as questões finais e 03 alunos (8,8%) não participaram da tarefa final.

TABELA 07 – Resultado final observando os principais momentos da pesquisa

Alunos	Diagnóstico	Oficinas	Aferição de retorno	Retenção
1	Não	Sim	Sim	Sim
2	Não	Sim	Sim	F
3	Sim	Não	Sim	F
4	Não	Não	Sim	Não
5	Sim	Sim	Sim	Sim
6	Sim	Não	Sim	Sim
7	Não	Sim	Sim	Sim
8	Sim	Sim	Sim	Sim
9	F	Sim	Sim	Sim
10	Não	Sim	Sim	Sim
11	Não	Sim	Sim	Sim
12	Não	Sim	Sim	Sim
13	Não	Não	Sim	Sim
14	Sim	Não	Sim	Sim
15	Sim	Não	Sim	Sim
16	Não	Não	Sim	Sim
17	Não	Não	Sim	Sim
18	Sim	Sim	Sim	Sim
19	Não	Sim	Sim	Sim
20	Não	Não	Sim	Sim
21	Não	Sim	Sim	F
22	Sim	Não	Sim	Sim
23	Sim	Não	Sim	Sim
24	Sim	Não	Sim	Sim
25	Sim	Sim	Sim	Sim
26	Sim	Não	Sim	Sim
27	Sim	Sim	Sim	Sim
28	Não	Sim	Sim	Não
29	Sim	Sim	Sim	Sim
30	Sim	Sim	Sim	Sim
31	Sim	Sim	Sim	Sim
32	Não	Não	Sim	Sim
33	Sim	Sim	Sim	Sim
34	Não	Sim	sim	Não

Fonte: Construção da pesquisadora

Assim, 28 alunos apresentaram uma retenção do conceito de triângulos satisfatória em suas respostas, após o intervalo de dois meses. Ao serem expostos a situações mais complexas, que envolviam o conteúdo área de Triângulos, os estudantes que participaram do estudo (31) apresentaram 90,3% de rendimento satisfatório, considerando um total de 28 estudantes, sendo desconsiderados os resultados dos três estudantes que não participaram deste último momento do estudo, enquanto apenas 9,7% não apresentaram resultados favoráveis ou não participaram da etapa final da pesquisa. Estes dados estão sintetizados na Tabela 8.

Na Tabela 08, a segunda coluna indica os estudantes que participaram da etapa diagnóstica. Dentre os 34 estudantes, 17 participaram (50%) dessa etapa, acertando os itens propostos naquele momento, enquanto 16 estudantes (47%), apesar de terem participado da tarefa, erraram as respostas. Apenas um estudante (3%) não participou da tarefa diagnóstica, mas esteve presente na última etapa do curso.

Na terceira coluna da Tabela 08 tratamos dos estudantes que participaram (ou não) das oficinas didáticas realizadas nos polos: 20 estudantes (58,8%) participaram das oficinas, enquanto 14 estudantes (41,2%) não participaram deste momento presencial nos polos.

Na quarta coluna da Tabela 08 registramos a aferição de retorno: os 34 estudantes (100%) apresentaram desenvoltura na realização das tarefas propostas e os que não a apresentaram foram desconsiderados no estudo. Essa opção se deu em função desses estudantes não terem participado da maioria das etapas do estudo, o que prejudicou o seu rendimento na disciplina.

Na quinta coluna da Tabela 08 registramos o resultado da última tarefa, que tinha como intuído identificar a retenção do conteúdo assimilado após o período de dois meses de intervalo da discussão. Verificamos que 28 estudantes (83,3%) apresentaram boa desenvoltura na realização da tarefa, com um rendimento satisfatório nas questões avaliadas, após o intervalo da discussão; três estudantes (8,8%) não obtiveram êxito satisfatório e três (8,8%) não participaram da etapa do estudo.

Ao final, concluímos que, de 31 estudantes presentes na última etapa do estudo, excluindo aqui os estudantes que faltaram, 28 estudantes apresentaram um desenvolvimento satisfatório na etapa final da pesquisa, enquanto três estudantes não alcançaram o nível desejado.

7.9 ASSIMILAÇÃO DA AÇÃO

Ao final do estudo verificamos que, dos 34 estudantes que participaram da maior parte das etapas aplicadas do estudo, que teve uma duração total de sete meses, 31 deles apresentaram desenvolvimento satisfatório com relação ao conceito de Triângulos, sendo o seu desempenho 100% satisfatório com relação a situações mais complexas, aplicadas a outras áreas de conhecimento. Constatamos que os outros três estudantes não apresentaram resultados favoráveis ou não participaram da tarefa final, o que pode ser explicado por sua ausência em algumas etapas do processo.

Dizemos que o controle de uma tarefa é satisfatório quando, ao propormos situações problemas sobre o assunto específico estudado com um grau mais elevado e depois de algum tempo de discussão, obtemos bons resultados. No nosso estudo foi avaliado a retenção do conceito estudado após dois meses de conclusão da disciplina, em outra disciplina no período subsequente, por meio de duas situações problemas, com caráter de complexidade mais elevado em relação às tarefas aplicadas anteriormente, utilizando o tempo máximo de 120 minutos consecutivos. O aluno deveria apresentar seu procedimento de resolução, sem nenhuma orientação prévia. Verificamos também a velocidade com que o estudante realiza a tarefa. A automatização é aqui entendida como o movimento que demanda a execução de várias combinações de ações, novas ou não, para realizar a tarefa de forma consciente. Verificamos que todos os estudantes realizaram a tarefa sem ultrapassar o tempo máximo (120 minutos) e mais da metade dos participantes realizou a tarefa, em média, utilizando uma hora e trinta minutos, solucionando corretamente as duas questões.

A autonomia do estudante na realização da tarefa escolar também foi evidenciada. Inicialmente é normal que o professor, em qualquer conteúdo didático, use a mediação. Este profissional deve realizar com o estudante as particularidades da ação, acompanhando-o em suas ações de uma etapa a outra que, gradualmente, se transforma em ato mental. Ao atingir a internalização da ação, o aluno não mais necessite de orientação externa do professor ou de qualquer outro material para a realização da tarefa. Verificamos que as dúvidas e esclarecimentos dos estudantes formam pouco expressivas, durante todo o período de desenvolvimento da pesquisa, uma vez que a maioria dos estudantes (cerca de 90% dos participantes) não recorreu aos tutores nem ao professor. Nesse caso, constatamos avanços na autonomia da maioria dos estudantes, com exceção de apenas dois estudantes, que frequentemente solicitavam explicações complementares e evidenciavam muitas dúvidas.

Apresentamos na Tabela 09 uma síntese dos dados finais de todas as etapas da pesquisa, com os participantes cujos resultados foram considerados, e seus respectivos desempenhos na realização das etapas do estudo.

TABELA 08: Resumo da participação e do êxito dos estudantes nas etapas do estudo

	Etapa de Criação Diag.	 Oficin	Etapa Mat. ou Materialz.	Etapa Ling. Externa	Etapa da Ling. Interna	Etapa Mental	Etapa de Controle	Retenção
Nº alunos particip.	72	34	61	72	56	55	34	31
Êxito nas tarefas	38,8%	100%	64%	60%	70%	35%	68%	90,3%

Fonte: Construção da pesquisadora

Observando a Tabela 09, verifica-se que: i) O número de participantes do estudo foi decrescendo no decorrer do estudo, fato este que se atribui ao grande índice de evasão do Curso, em todas as disciplinas; houve uma pequena oscilação entre as etapas da pesquisa com relação ao êxito das tarefas dos estudantes. Consideramos que o momento mais difícil foi o da Etapa Mental, no qual os participantes deveriam propor uma atividade para estudantes do Ensino Fundamental. O momento mais positivo do estudo foi o da oficina presencial nos polos, onde tivemos uma participação ativa de todos os estudantes presentes.

Ao final do estudo, com relação às transformações sofridas pela ação no decorrer das etapas e a internalização do conceito de triângulo, constatamos que 28 estudantes foram exitosos, o que comprova a potencialidade da Teoria quando aplicada a distância.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Brasil conta hoje com avanços expressivos quanto ao acesso dos estudantes à escola, em especial no Ensino Fundamental. Passada a etapa de garantir o acesso aos ambientes escolares, surgem outras demandas sociais que impulsionam ou resultam de estudos voltados à melhoria da educação, visando a superação de problemas como a violência no ambiente escolar; a falta de motivação de alunos e professores, ou outros igualmente importantes. Também se questiona a omissão da escola em seu papel de educar e formar o estudante para o exercício pleno da cidadania.

Assim, nossos esforços deverão estar voltados para a qualidade do ensino oferecido pelas nossas instituições escolares às crianças, aos jovens e aos adultos que a elas se vinculam, sendo fundamentais questões que devemos nos fazer, enquanto profissionais da educação, dentre as quais destacamos: *como os estudantes aprendem? Essa aprendizagem é duradora? Como favorecer a aprendizagem nos discentes, com significado?*

Diante da complexidade de tais questões e de tantas necessidades preteridas, nossa proposta no presente estudo foi investigar um fragmento do contexto educacional, mais especificamente, fazendo um recorte na Matemática, com o intuito de analisar as contribuições de aproximações à Teoria da Atividade proposta por Talizina (2000), no ensino do conteúdo Triângulos, no curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFPB Virtual. Visando alcançar nosso objetivo geral, elencamos objetivos específicos, apresentados no início de nosso texto, e que, entendemos, foram plenamente atendidos, em virtude do que discutimos ao longo da apresentação e análise de dados.

Após realizarmos um estudo aprofundado de nosso referencial teórico, planejamos os passos seguintes da pesquisa e, durante sete meses realizamos a fase de atividade de campo, executando e avaliando os estudantes de forma direta e contínua, o que nos possibilitou responder aos objetivos e hipóteses traçados no início de nossa investigação.

De modo geral concluímos o que segue, destacando como primeiro ponto o perfil dos estudantes da disciplina de Tópicos Especiais em Matemática II, que é muito similar ao do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial do Campus IV – Rio Tinto, da mesma instituição de ensino, quanto às características de gênero, idade, localização, renda e outros aspectos relevantes. Este perfil é diferenciado dos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus I, João Pessoa, no que se refere aos objetivos de estudos e acesso ao curso, evidenciado durante o estudo.

Na etapa diagnóstica da pesquisa, constatamos que 61,2% dos estudantes, de um universo de 72 participantes, não tinham assimilado elementos centrais relativos ao conceito de triângulo, errando a questão proposta. Conteúdos associados a esse conceito são trabalhados nos 12 anos de escolaridade proporcionados pelo Ensino Básico em nosso país, mas a maior parte dos estudantes não foi capaz de resolver uma situação simples, que deve estar presente no repertório de todo estudante ao fim de sua escolaridade básica, sendo este fato muito mais grave em alunos de 5º período de um Curso de Licenciatura em Matemática, que estarão aptos a exercer em breve a docência.

Quanto ao sistema didático, elaboramos 73 questões distribuídas em 23 tarefas, incluindo toda a produção escrita (14); o levantamento do perfil da turma (1); a organização dos grupos (2); as oficinas temáticas (5); e, por último, a tarefa de aferição de controle (1) e a avaliação da qualidade da assimilação da ação e do conceito através do qualificador solidez (1). Durante 14 semanas discutimos e apresentamos o sistema didático baseado nas etapas propostas (Apêndices).

Por fim, avaliamos e adaptamos a proposta segundo os preceitos e a característica peculiar (e limitações) da modalidade da Educação a Distância e o uso de aplicativos dinâmicos no ensino de Matemática. Obtivemos os seguintes resultados, ao final do período do estudo: a etapa da criação foi subdividida em dois momentos: diagnóstico e oficinas. Participaram do diagnóstico 72 estudantes, tendo 28 deles obtido êxito nas tarefas; nas oficinas didáticas estiveram presentes 34 estudantes, que participaram 100% das tarefas obtendo sucesso na realização das propostas neste momento.

Da etapa material ou materializada, participaram 61 estudantes, tendo 39 deles obtido êxito nas tarefas realizadas. Na etapa da linguagem externa, participaram 56 estudantes, tendo 33 participado das tarefas propostas de forma exitosa. Na etapa da linguagem interna participaram 56 estudantes, dos quais 39 apresentaram êxito na realização das tarefas. Na etapa mental participaram 55 estudantes, dentre os quais 19 obtiveram êxito nas tarefas propostas.

No controle final constatamos o sucesso alcançado por 23 dos 34 estudantes aptos a participarem desse momento da pesquisa. Por fim, realizamos uma avaliação desejando identificar a retenção do conceito estudado onde verificamos que 28 estudantes obtiveram sucesso na realização de tarefas mais complexas após o intervalo de dois meses.

Pelo exposto ao longo de nosso texto e sintetizado em nossas Considerações Finais, entendemos que temos obtido elementos suficientes para sustentar nossa defesa de que através de uma orientação adequada, tendo como base elementos da Teoria da Atividade, podemos potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática dos estudantes em cursos de Licenciatura em Matemática a distância.

Em nosso estudo fizemos um recorte em termos de conteúdo matemático, mas entendemos que muitos resultados podem ser estendidos para outros conteúdos da área, ou mesmo, de outras áreas do conhecimento, guardadas as especificidades de cada caso.

Destacamos que nosso estudo pode ser considerado particularmente relevante no que tange: ao uso do sistema de grupos na dinâmica da EaD em cursos de Matemática, nunca feito antes no curso investigado; ao uso da proposta teórica da aproximação da Teoria da Atividade, em cursos de Licenciatura em Matemática a Distância, sendo aplicado com adultos; ao planejamento, elaboração execução e avaliação do sistema didático proposto para a discussão do conceito de triângulo; a elaboração do esquema de orientação para o estudo de triângulos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Este tipo de instrumento pode ser reutilizado em futuros trabalhos de outros docentes.

Verificamos também que o arcabouço teórico adotado possibilitou um maior autocontrole dos estudantes e desenvolvimento da autonomia, mostrando como a prática pode facilitar o desenvolvimento de capacidades e de suas habilidades. O ensino nesta perspectiva supõe novas formas de organização, diferentes da usual adotada nas escolas. Esta proposta é arrojada e demanda um currículo flexível, maior tempo para elaboração, execução, avaliação e controle das tarefas. Itens que geram medo e ansiedades iniciais nos profissionais de educação, mas que são perfeitamente possíveis de serem atingidos. Exige desses profissionais uma postura de enfrentamento, reflexiva, dinâmica e criativa, no processo metodológico de ensino.

Assim, nossa investigação mostrou potencial, em especial quanto à possibilidade de realização de outros estudos, a partir do que aqui foi apresentado, na perspectiva de ampliação da discussão em cursos na modalidade presencial, em nível superior de ensino, podendo atingir outras categorias de ensino como o Ensino Básico na disciplina de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. *A alegria de ensinar*. São Paulo: Ars Poética, 1994.

AMMANN, S.; GONZÁLEZ, C. Construcción de triángulos: del dibujo a la figura. In: AMMANN, S. (et al). *Geogebra entra al aula de matemática*. Montevideo, Uruguay: Espartaco, 2012.

ANDRADE, J. A.A.; NACARATO, A. M. *Tendências Didático-Pedagógicas para o Ensino de Geometria.* 2007. Disponível em: www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/769/640 Acesso em: dez/2013

ASSIS *et al*. *Licenciatura em Matemática a distância*. 3ª ed. João Pessoa: UFPB, 2010

ARDENGHI, M. J.; IGLIORI, S. B. C. *Ensino aprendizagem do conceito de função*: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Pontifica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC, 2008.

ARETIO, L. G. *El material impreso em la ensiñanza a distancia*: actas y Congreso. 2ª edição. Madrid: UNED, 2004.

_______. *La educación a distância*: De la teoria a la práctica. 3. ed. Barcelona: Ariel, 2006.

BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BBAD, G.S.; CARVALHO, R.S.; ZERBINI, T. Evasão em curso a distância via internet: Explorando variáveis explicativas. In: Encontro da ANPAD, 29. Brasília, 2005

BASSAN, L.H.; MILLER,S. *Teoria da formação das ações mentais por etapas, de P. Gasperin, e o processo de humanização.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências: Marília, 2012.

BIEMBENGUT, M. HEIN, N. *Modelagem Matemática no ensino*. 5ª ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BORBA, M.C.; MALHEIROS, A.P. S.; ZULATTO, R. B. A. Educação a distância online. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOGDAN, R. C.; SARI, K. B. *Investigação Qualitativa em Educação*. Trad.: ALVAREZ, M.J.; SANTOS, S. B. e BAPTISTA, T.M. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, Secretaria de Ensino Fundamental. BRASIL: MEC/SEF, 1997.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática, 3º e 4º ciclos (5ª a 8ª séries) – Brasília: MEC/SEF, 1998 b.

______. *Descritores da matemática para o Ensino Básico*. Secretaria de Ensino Fundamental e Médio. BRASIL: MEC/SEF, 2003.

______. Olimpíadas de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, 2006. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ Acesso em Fev/ 2014.

______. Olimpíadas de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, 2013. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ Acesso em Fev/ 2014.

______. *Sistema Integrado de Monitoramento, Execução e Controle Nacional* – Brasília: SIMEC/MEC, 2009. Disponível em: www.simec.mec.gov.br Acesso em: 25 fev. 2009.

______. Olimpíadas de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, 2011. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ Acesso em Fev/ 2014.

______. RESOLUÇÃO Nº 2, DE 30 DE JANEIRO 2012. Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio 2012. CNE/MEC, 2012. Disponível em:

http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/resolucao_ceb_002_30012012.pdf Acesso em jun/2013.

_______. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística* – IBGE. Brasília: 2013. Disponível em: www.ibge.gov.br . Acesso em: 25 fev. 2013.

_______. *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: Matemática, Secretaria de Ensino Básico. BRASIL: MEC/SEB, 2006.

_______. Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 02 de 30 de janeiro de 2012. *Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Disponível em: <www.planalto.gov.br> Acesso em: junho de 2012.

BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARRAHER, T. N. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

CURY, H. N. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 15ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática*: livro do professor. (5ª a 8ª séries). São Paulo: Ática, 2000.

______. *Contextos e Aplicações*. Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Ática, 2000.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. *Exploração do espaço e prática da medição*. São Paulo: EPU, 1977.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The Nature of the Process Conception of Function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Edit.) *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America*, MAA Notes and Reports Series, v.25, p. 85-106, 1992.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticos. Org: CAMPOS, T.M.M. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

________. Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In: Luis RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Org.) *Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series Semiotics in Mathematics Education*: Epistemology, History, Classroom, and Culture, Vol. 1. Ed. Sense publishers Rotterdam/Taipei, Roterdão, Holanda, 2008.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004

FARIAS, S. A. D; RÊGO, R. G. *Uma análise da produção didática a distância*: o caso da UFPB. Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa: UFPB, 2009.

_________. *O uso de calculadoras em sala de aula*. João Pessoa: UFPB, 2003.

FERNANDES, F. *Educação e Sociedade no Brasil*. São Paulo, SP: Dominus, 1966.

FERNANDES, A. Investigações em EaD, 2009. In: *Censo EAD.BR 2012*: relatório analítico da aprendizagem a distância no Brasil. Curitiba: Ibpex, 2013.

FILATRO, A. *Design instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

_________. *As teorias pedagógicas fundamentais em EAD*. In: LITTO, F.M.; FORMIGA, M.M.M. (orgs.), Educação a distância: o estado da arte. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

FELD, V.; ESLAVA-COBOS, J.. *¿Hacia dónde va la neuropsicología? La perspectiva histórico-cultural de Vigotsky y la neuropsicología*, Buenos Aires, Noveduc, 2009.

FERREIRA, N. S.; SOUSA, N. J. O jovem e a internet: acesso e uso entre jovens da cidade de João Pessoa – PB. Anais do II Colóquio de Pesquisa em Educação Superior: Formação de professores e Ensino por Competências. 13-15 de outubro de 2014: PPGE/CE/UFPB.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia:* Saberes necessários à prática educativa**.** 7 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1995.

GALPERIN, P. Ya. La Formación de las imagenes Sensoriales y los Conceitos. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

___________. Tipos de Orientación y Tipos de Formación de las Acciones y los Conceitos. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

___________. La Formación de los Conceitos y las Acciones Mentais. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

___________. Acerca del Lengueje Interno. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

__________. La Investigación del Desarrollo Intelectual del Niño. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

___________. La dirección del Proceso de Aprendizaje. In: ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

GALLEGUILLOS e BORBA, M. C. *A Atuação do Professor na Educação Matemática online.* Tese (doutorado em Educação Matemática) - instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2013.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 2011.

HASE, S.; KENYON, C. *Da andragogia para heutagogia*. Austrália: SCU, 2000. Disponível em: <http://ultibase.rmit.edu.au/Articles/dec00/hase2.htm#ref.> Acesso em junho de 2013.

KAMII, C.. *A criança e o número*. Campinas: Papirus, 1990.

KING, j. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. *Geometria Dinâmica*. Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2003.

LEONTIEV, A. N. Curso de Psicologia General. Vol. I, II, III e IV. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Civilización Brasileira, 1991.

LORENZATO, S. (org.). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* São Paulo: Autores Associados, 2006.

LITTO, F.M., FORMIGA, M.M.M. (orgs.), *Educação a distância:* o estado da arte. Vol. 1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

__________. *Educação a distância:* o estado da arte. Vol. 2. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

MAIA, M.C.; MEIRELES, F. S. Evasão os cursos a distância e a sua relação com tecnologias da informação e comunicação. In: Encontro da ANPED, 29. Brasília, 2005.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

MASAGÃO, V. *O analfabetismo funcional e os impactos no Brasil*. Instituto Paulo Montenegro – INAF, 2012. Disponível em: http://www.ipm.org.br/ipmb_pagina.php?mpg=4.02.01.00.00&ver=por Acesso em junho de 2014.

MENDES, I. A. M. Investigação Histórica no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, M. H. M. *O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau.* Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994. 131f.

MUNEM, M. A.; FOULIS. D.J. *Cálculo.* Vol. 1. Tradução: CORDEIRO *et al*. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

NASSER, L. (Coord.) *Geometria segundo a teoria de Van-Hiele*. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1997.

_________. Anais do VI ENEM, p. 71-74, Volume 1. IM/UFRJ e SENAI/CETIQT; 1998.

NASSER, L. SANTA'ANA, N. P. *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. Instituto de Matemática – Projeto Fundão UFRJ. Rio de Janeiro: SPEC/PADCT/CAPES, 2000

NOGUEIRA, M.A.; CATANI, A. *Escritos de Educação*: Pierre Bourdieu. Petrópolis, RJ: Vozes, 1998.

NÚÑEZ, I. B. *Vygotsky, Leontiev e Galperin*: Formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

NÚÑEZ, I. B.; RAMALHO, B. L. *A formação de habilidades no contexto escolar*: contribuições da teoria de P. Ya. Galperin. Natal: UFRN, 2009.

NUNES, C. B. O *Processo de Ensino –Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: Perspectivas Didático-matemáticas na Formação Inicial de Professores de Matemática.* Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, Educação Matemática, Cultura e Diversidade - Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

OLIVEIRA, M. V. F. *Pensamento teórico e formação docente*: apropriação de saberes da tradição lúdica na perspectiva da teoria formação das ações mentais por etapas de P. Ya. Galperin. 2011. Tese de doutorado (Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

OLIVEIRA, C. N.; FUGITA, F.; FERNANDES, M. A. M. Coleção Para Viver Juntos: matemática – Ensino Fundamental. 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. 2ªed. São Paulo: SM, 2011.

PARAIBA, Estado. Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba, João Pessoa: SEE/PB, 2010.

PALANGE, Investigações em EaD, 2009. In: *Censo EAD.BR 2012*: relatório analítico da aprendizagem a distância no Brasil. Curitiba: Ibpex, 2013.

PAVANELLO, M.R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké.* Unicamp, Faculdade de Educação, SP, ano 1, nº 1, pp. 07-17, 1993

PASSOS, C. L. B. Que Geometria acontece na sala de aula? In: MIZUKAMI, M.G.N., REALI, A.M.M.R. *Processos formativos da docência:* conteúdos e práticas. São Carlos: EDUFSCar, 2009.

PEREIRA, J. E.; NÚÑEZ, I. B. *Formação da habilidade de interpretar gráficos cartesianos em licenciandos em química segundo a Teoria de P. Ya. Galperin*. Tese de doutorado apresentado ao Programa de Pós- Graduação em educação da Universidade Federal de Natal. Natal, UFRN, 2013.

PIAGET, J. *O julgamento moral na criança*. São Paulo: Mestre Jou, 1968.

PICHOVER, C. A. O livro da matemática: De Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática. Kerkdriel, Holanda: Librero, 2011

PRIMI, R. *Avanços na interpretação de escalas com a aplicação da Teoria de Resposta ao Item Universidade São Francisco*, 2004. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?pid=S1677-04712004000100006&script=sci_arttext Acesso em: jun. de 2014

POLYA, G.. *A arte de resolver problemas*. 2.ed. São Paulo: Hermann, 1995.

PONTE, J. P. Investigações em Matemática. Lisboa: APM, 2005

POZO, J. I. (org). *A solução de problemas: Aprender resolver, resolver para aprender*. Reimpressão 2008. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RÊGO, R. G. e RÊGO, M. R. *Matematicativa.* 1ª ed. João Pessoa: UFPB, 2004

RÊGO, R. G.; Paiva, J.P. *Tópicos Especiais em Matemática III*. In: ASSIS *et al.* Licenciatura em Matemática a Distância. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2009.

RÊGO, R. G. *Um estudo sobre a construção do conceito de função.* Tese. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000. 247p.

RESENDE, A.; VALDES, H. *Galperin:* Implicações educacionais da teoria de formação das ações mentais por estágios. Revista Educação e sociedade, Campinas, vol. 27, nº 97, p. 1205-1232, set/dez, 2006. Disponível em Http:// www.cedes.unicamp.br Acesso jun/2013.

RIBEIRO, R. P**.** *O processo de aprendizagem de professores do ensino Fundamental:* apropriação da habilidade de planejar situações de ensino de conceitos. 2008. Tese de doutorado (Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

RODRIGUES VAZ, M. Investigações em EaD, 2009. In: *Censo EAD.BR 2012*: relatório analítico da aprendizagem a distância no Brasil. Curitiba: Ibpex, 2013.

ROMANELLI, O. de O. *História da Educação no Brasil*. 29ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

ROJAS, L.Q.; SOLOVIEVA, Y (Org.). *Las Funciones Psicológicas em el Desarrollo del Niño*. México: Trillas, 2009.

SALVADOR, C. Coll. et al. *Psicologia do Ensino*. Porto Alegre: Artmed, 2005.

SANTOS, M. C. O Cabri-Geéomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). *A Pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula.* São Paulo: Cortez, 2009.

SANTOS FILHO, C. V. *Conceito de função:* uma abordagem do processo ensino - aprendizagem utilizando-se o computador como recurso didático. Dissertação (Mestrado em Tecnologia) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003. 136p.

SCHWARZ, O. *Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995. 161f.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Edit.) *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series, v.25, p. 25-58, 1992.

SILVA, R. S. *Objetos de aprendizagem para educação a distância*: recursos educacionais abertos para ambientes virtuais de aprendizagem. São Paulo: Novatec, 2011.

SIMÕES, M. H. P. *Uma sequência para o ensino/aprendizagem de função do 2º grau*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995. 259f.

SOUZA, R. N. S. *A construção da noção de função linear*: transitando em diferentes registros semióticos. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2003. 164f.

SOLOVIEVA, Yu.; QUINTANAR, L. La formación invariante de la lectura em el idioma español”. *Revista de la Universidad Estatal de Moscú*, 14, 1: 62-70, 2006.

_________. *Enseñanza de la lectura. Método práctico para la formación lectora*, México, Trillas, 2008Aa.

SOUTO, D. L. P. BORBA, M.C. *Transformações Expansivas em um curso de Educação Matemática a Distância online.* Tese (doutorado em Educação Matemática) - instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2013.

TALIZINA, N. F. *Manual de Psicologia Pedagógica*. Universidade Autônoma de San Luis Potosí. Mexico: Potosína, 2000

__________. *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. 2001. Disponível em: http://books.google.com.br/books? Acesso em junho de 2013.

TALIZINA, N. F.; SOLOVIEVA, Y. ROJAS, L. Q. *La aproximación de La actividad em psicologia y su relación com el enfoque histórico-cultural de L. S. Vigotsky*. Revista Novedades Educativas. Nº 230, Febrero, 2010. pp 4-8.

TEDESCO, J. C.(org.) *Educação e Novas Tecnologias*: esperança ou incerteza? Trad. BERLINER, C.; LEITE, S.C. São Paulo: Cortez, 2008.

TEIXEIRA, P. *et al*. *Funções*: matemática – 10º ano de escolaridade. 2º ed. Lisboa, Portugal: PRODEP. 1997.

TRIMMER, A. Investigações em EaD, 2012. In: *Censo EAD.BR 2012*: relatório analítico da aprendizagem a distância no Brasil. Curitiba: Ibpex, 2013.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Didática da Matemática:* como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

UTIYAMAM, F.; BORBA, S.F.P. *Uma ferramenta de apoio ao controle da evasão aos alunos em cursos a distância via interne*. III Congresso internacional de Computação, 2003. Disponível em HTTP:// www.cbcomp.univali.br Acesso em junho de 2013.

UFPB Virtual. *Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB*. Disponível em: www.virtual.ufpb.br Acesso em junho de 2013.

VAN DE WALLE, J.A. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6ª.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, P.M. *La pensée de Iénfant et la géonétrie*. Bulletin de l'ÁPMEP. Paris, n. 198, 1959.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil,* 1730- 1930. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2009.

_________. *Que geometria ensinar?* Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças Pro-Posições | v. 24, n. 1 (70) | p. 159-178 | jan./abr. 2013.

VELOSO, E. *Geometria: Temas actuais: materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no ensino secundário). 1ª reimpressão. Portugal: Instituto de inovações Tecnológicas, 2000.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) *Seminário Internacional de Educação Matemática*, 1, 1993, Rio de Janeiro. Anais do Seminário Internacional de Educação Matemática, p: 1-26.

VIGOTSKY, L. S. *A formação da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Org.: COLE, M. et al. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

YAMIN, A. Apoio técnico pedagógico da Universidade de São Paulo, 2011. Disponível em:http://atp.usp.br/moodle/grupos-e-agrupamentos-no-moodle/ Acesso em jun /2013.

ZAPOROZHETS, A. V. *Desarrollo de los movimientos voluntarios*, Moscú, Pedagogía, 1986.

APÊNDICES

APÊNDICE A: ETAPA DA CRIAÇÃO – Tarefas propostas nas oficinas didáticas

1 Tarefa – Construindo triângulo

Material: papel, régua; compasso e transferidos.

Objetivo: Verificar as condições de existência de um triângulo qualquer;

Procedimentos: Será que dadas três medidas de comprimento, sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas? A resposta é não. Vamos entender o porquê.

Vamos construir um triângulo cujos lados sejam: 5cm; 1,5cm e 3 cm. Para isso temos que:

Traçar o segmento 5cm, que representa o lado AB do triângulo. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em A e a abertura de 1,5cm, traçar um arco de circunferência. Todos os pontos desse arco distanciam-se de 1,5cm do vértice A. Com a ponta-seca do compasso em B e abertura de 3cm, traçamos outro arco. Verifique se houve uma interseção entre os dois arcos.

Como os dois arcos não se intersectaram, é impossível obter o terceiro vértice do triângulo.

Logo, em todo triângulo a medida de qualquer lado é menor do que a soma da medida dos outros dois lados.

Testar para as seguintes medidas: 5cm, 1,5cm e 3,5cm; e 5cm, 1,5cm e 4cm. O que aconteceu?

Ver experimento no Geogebra.

2 Tarefa – Ângulos internos de um triângulo

Material: papel ofício, malha quadriculada, régua, tesoura, cola.

Objetivo: verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

Procedimento: 1 Com uma folha de papel ofício desenhe um triângulo qualquer, identificando seus lados e ângulos internos. Utilize par de esquadros e compasso para construção.

Depois, meça o tamanho de seus lados e de seus ângulos com instrumentos, anotando-os:

Lados: _________ Ângulos internos: __________

_________ __________

__________ __________

Corte o desenho em três partes, de modo que cada parte contenha um único ângulo interno do triângulo;

Cole as três partes em uma folha, de modo que os ângulos internos do triângulo fiquem adjacentes entre si.

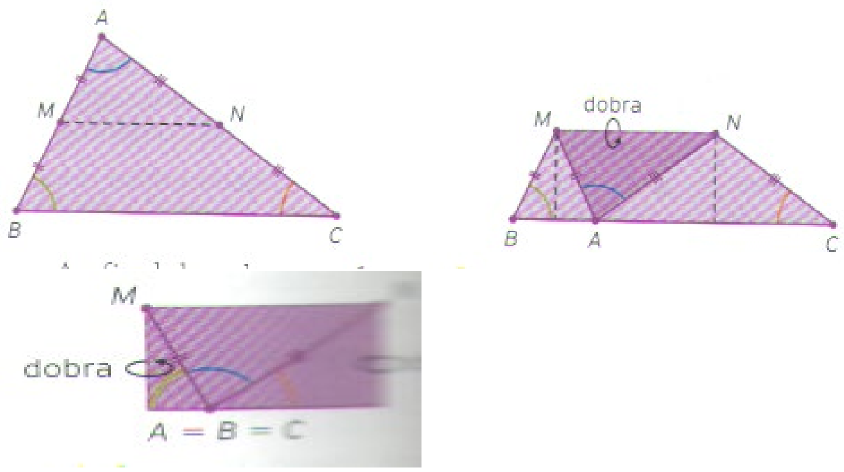
Agora responda:

Observando cada resultado dos estudantes, o que os alunos devem concluir a respeito da soma da medida dos ângulos internos de um triangulo?

Após a realização do experimento 1 é possível demostrar argumentos lógicos para mostrar que o resultado é valido para todos os triângulos em três partes.

3 Tarefa – Ângulos internos de um triângulo

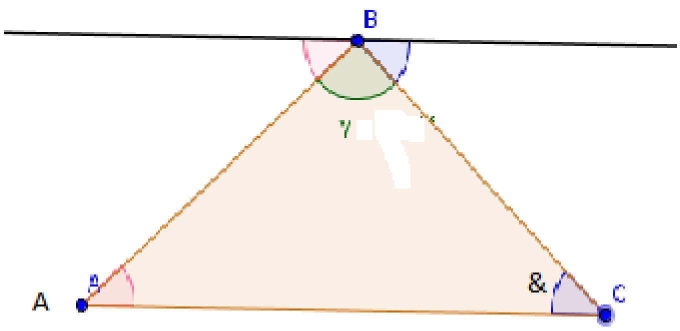
Usando papel quadriculado marque três pontos distintos e não alinhados na malha. Agora una-os através de segmentos de retas. Dobre a folha de papel no sentido do verso de modo que haja o encontro dos três vértices do triângulo em um ponto comum, conforme figura abaixo:



Ver experimento no Geogebra.

O professor deve orientar os estudantes na execução deste experimento de modo a mostrar a importância deste conhecimento para a Matemática e também para outras ciências, mas que isso não é suficiente para considerar o resultado sempre válido (Atividades 1, 2, 3). É necessário demostrar o resultado obtido, ou seja, é preciso apresentar argumentos lógicos para mostrar que a constatação experimental é válida para todos os casos, independente do experimento.

Podemos usar o aplicativo Geogebra na demonstração dos experimentos 1,2 e 3:



Sendo ABC um triângulo qualquer, podemos traçar pelo vértice B uma reta paralela àquela que contem o lado AC. Note que, no vértice B, temos ângulos dos vértices A e C. Portanto, no vértice B, temos y + & + x = 180º. Acontece que y + & + x é precisamente a soma da medida dos ângulos internos, como queríamos demostrar.

Este tipo de experimento permite estabelecer o nível dos alunos com relação às seguintes questões:

- Identificar e explicar o conceito da representação geométrica abordada;
- Conhecer os elementos utilizados para explicar os principais elementos necessários para a construção e existência de um triângulo qualquer na matemática.

Ao final pedir que o estudante observe a seguinte representação geométrica:

- Identifique o nome matemático da figura
- Calcule sua área
- Calcule o seu perímetro
- Explique qual a diferença desta figura para um retângulo
- Podemos formar uma figura semelhante como a apresentada, utilizando qualquer medida de lados? Por quê?

APÊNDICE B: PRIMEIRA TAREFA EM GRUPO – USO DO GEOGEBRA

Aluno 1: ____ mat.: _______
Aluno 2 : ____ mat.: _______

O aluno 1 realizará a **Parte I** e aluno 2 realizará a **Parte II**. Quando o aluno 1 terminar a parte I, este apresentará e discutirá com o aluno 2 a sua execução e os procedimentos adotados (de forma presencial ou a distância) O aluno 2, neste momento, será o revisor da atividade realizada pelo aluno 1, cabendo a ele (aluno 2) a verificação de todos os passos adotados pelo aluno 1. Caso seja necessário, o aluno 2 poderá solicitar ao aluno 1 que refaça, total ou parcial, a parte I, justificando o seu pedido.

Na parte II as competências dos estudantes são invertidas: agora o aluno 2 realizará toda a execução e os procedimentos da parte II, enquanto que o aluno 1 será o revisor.

As discussões são necessárias e pertinentes entre a dupla. Cabe aos estudantes tentar resolverem as Partes I e II da tarefa que segue, só devendo recorrer à tutora ou a professora depois que discutirem, em conjunto, e esgotarem todas as tentativas de resolução.

Após o término, salva o arquivo e um dos integrantes do grupo envia a atividade.

Parte I: **Construção e verificação das características de um triângulo qualquer.**

1. Observe a sequência e as ferramentas para a construção. Em seguida, responda.

Sequência	Ferramentas	Procedimentos para construção
1		Crie um triângulo ABC (Use o sentido anti-horário). Indique os vértices e lados (rótulos sem o valor)
2		Reta d que passa por A e B
.3		Reta que passa por C e que forma com a reta d um ângulo reto.
4		Marque a interseção entre a reta suporte d e a reta perpendicular. Um ponto D será criado. Esse ponto é chamado de *Pé da perpendicular* ou *pé da altura*.
5		Exiba a medida do segmento CD. Essa é a altura do triângulo relativa ao lado AB
6		Salve seu arquivo

1.1 Movimente o triângulo de modo que o pé da altura seja o ponto médio da base. Que tipo de triângulo temos, neste caso?

Parte II: Alturas de um triângulo.
Utilize o mesmo procedimento para encontrar as outras duas alturas do triângulo ABC, relativas aos lados BC e AC.

Área de um triângulo.
Utilize o campo de entrada e digite a fórmula do cálculo de área de um triângulo.

Agora, utilize a ferramenta cm^2 e clique sobre o triângulo. O que você observa?

APÊNDICE C: ETAPA MATERIALIZADA 1

UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
2ª Tarefa em grupo – 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

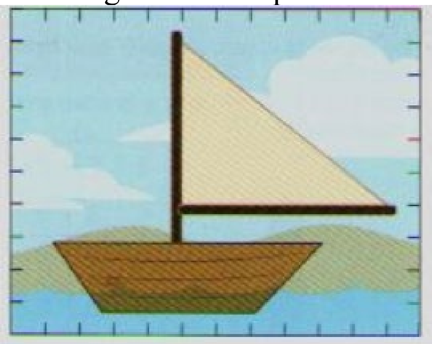
Aluno(a) (Executor): _______________________________________ Matrícula: ____________
Aluno(a) (Avaliador): ______________________________________ Matricula: _____________

Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolva-as utilizando o cartão com a Base Orientadora da Ação (BOA) que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo. Caso a dúvida ainda persista entrar em contato com a tutora presencial da disciplina.
Obs: **Todas as questões abaixo foram retiradas de livros didáticos do 6º ao 9 anos do Ensino Fundamental.**

1 O Tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa, construído por sete figuras geométricas.
a) Construa seu Tangram e determine uma maneira de cobrir uma das regiões triangulares maiores usando outras peças.
b) Calcule a área de cada triângulo do Tangram, considerando a área de quadradinho como 1cm². Sugestão: Construir um Tangram usando malha quadriculada.

2 Observe a figura 01 abaixo:

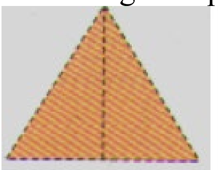
Figura 01: Barquinho



Considere a escala nas laterais do desenho como 1 m. De quantos metros quadrados de tecido é composta a vela desse barquinho?

3 Vamos resolver um quebra-cabeça? Construa três triângulos equiláteros do mesmo tamanho e pinte a região interna deles. Recorte as três regiões triangulares pelo contorno e, em seguida, corte-as segundo um de seus eixos de simetria. Veja a figura 02 abaixo:

Figura 02: Triângulo equilátero

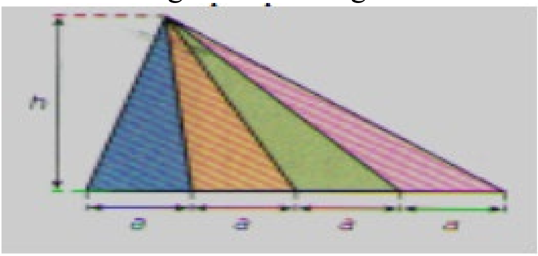


Você consegue montar uma única região triangular usando todas as seis peças, sem sobreposição, de modo que o contorno da região formada seja um triangulo equilátero? Como você pode determinar a área da nova figura? Explique.

4 Construa os seguintes polígonos:
a) Um triângulo retângulo cujos lados perpendiculares meçam 3 cm e 5,5 cm. Depois identifique a sua área e seu perímetro;
b) Um triângulo isósceles que tenha um ângulo interno de 100º e cujos lados congruentes meçam 5 cm. Identifique a sua área e perímetro.

5 Roberta decorou a capa de uma agenda, como mostra a figura 03. Que relação é possível fazer entre as áreas cobertas por cada uma das cores? Explique.

Figura 03: Triângulo

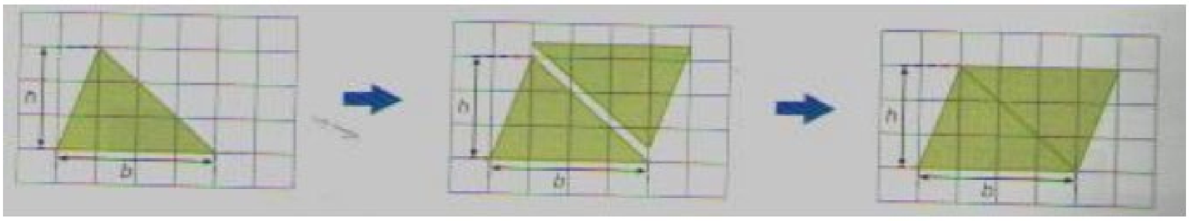


6 Calcule a área da região colorida de verde em cada caso seguir, conforme figura 04. Considere que o lado BC d cada triangulo está dividido em segmentos de mesma medida, e que a área de cada triangulo ABC é 90 cm².

Figura 04: Triângulos a) e c)

7 Ao duplicarmos uma região triangular, podemos compor duas figuras de modo a obter uma região plana com a forma de que figura geométrica? Veja a figura 05.

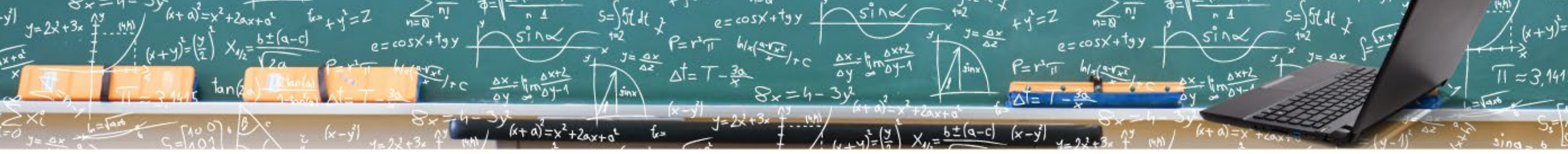
Figura 05: Composição de figura geométrica



a) Qual a forma mais adequada de calcularmos a área da região triangular? Explique.

8 Os ângulos internos opostos aos lados AB, AC e BC de um triângulo ABC têm medida c, b e a. Determine a relação entre os lados, nos seguintes casos (faça a figura de cada triângulo). Ao final identifique qual o triângulo que tem a maior área entre os três.
a) $a > b > c$; b) $a = b < c$; c) $c = a = b$.

9. Calcule a área do triângulo cujos lados medem 10 cm, 17 cm e 21 cm.



10 Um fazendeiro queria cercar uma região plana triangular para plantar verduras. Sabendo que os lados da região medem 3 m, 4 m e 10 m, determine a área aproximada da região destinada ao plantio de verduras.

APÊNDICE C: ETAPA MATERIALIZADA 2

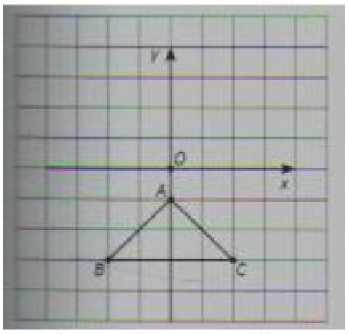
UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
2ª Tarefa em grupo – 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

Aluno(a) (Executor): ______________________________________ Matrícula: ___________
Aluno(a) (Avaliador): ______________________________________ Matricula: ____________

Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolva-as utilizando o cartão com a Base Orientadora da Ação (BOA) que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo. Caso a dúvida ainda persista entrar em contato com a tutora presencial da disciplina.
Obs: **Todas as questões abaixo foram retiradas de livros didáticos.**

1 Os vértices do triângulo representado na malha quadriculada a seguir são A(0, -1), B(-2, -3) e C (2, -3), conforme figura 01.

Figura 01: Triângulo na malha quadriculada

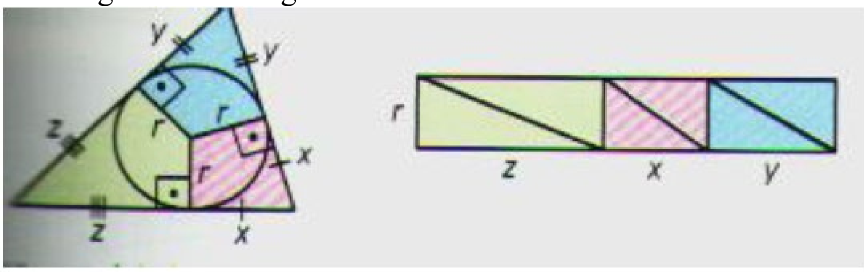


a) Considerando que seja aplicada ao triangulo uma rotação de 90º em torno do ponto O, no sentido anti-horário, obtenha as coordenadas dos vértices do triangulo assim obtido e calcule a sua área.
b) Considerando as características iniciais da área e do perímetro do triângulo ABC responda: houve alguma alteração na área e no perímetro após a rotação? Explique.

2 Calcule a área de um triangulo cujos lados medem 13 cm, 14 cm e 15 cm. Depois, calcule a altura relativa ao lado de 14 cm desse triângulo. Use a fórmula de Heron e o teorema de Pitágoras para resolver esta atividade.

2 Vamos resolver um quebra-cabeça? Paulo fez a seguinte composição com algumas peças, mostrada na figura 02.

Figura 02: Triângulo circunscrito em uma circunferência

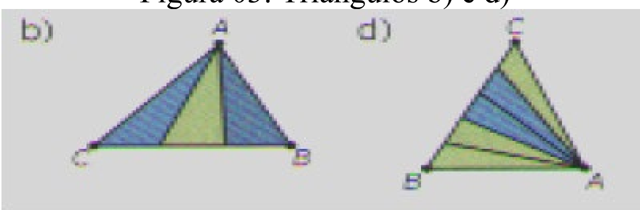


Use a ideia de Paulo para calcular a área de um triângulo que tem perímetro 16 cm e cujo raio da circunferência inscrita mede 3 cm. Como podemos determinar a área da nova figura? Explique.

4 Construa os seguintes polígonos:
a) Um triângulo retângulo cujos lados perpendiculares meçam 6 cm e 11 cm. Depois identifique a sua área e seu perímetro;
b) Um triângulo isósceles que tenha um ângulo interno de 120º e cujos lados congruentes meçam 6 cm. Identifique a sua área e perímetro.

5 Calcule a área da região colorida de verde em cada caso seguir, conforme figura 03. Considere que o lado BC d cada triangulo está dividido em segmentos de mesma medida, e que a área de cada triangulo ABC é 90 cm².

Figura 03: Triângulos b) e d)



6 Calcule a área do triângulo cujos lados medem 8 cm, 15 cm e 19 cm.

7 Um agricultor queria cercar uma região plana triangular para plantar frutas. Sabendo que os lados da região medem 10 m, 2 m e 4 m, determine a área aproximada da região destinada ao plantio de do pomar.

8 Um triângulo equilátero tem 24 cm de perímetro
a) Qual a medida do ado desse triângulo?
b) Calcule a medida da altura desse polígono.
c) Calcule a área do triângulo.

9 Calcule o aumento da altura de um triangulo equilátero, se a medida de cada um de seus lados for aumentado 6m. A área também é aumentada de 6m²? Explique.

10 Elabore um problema que, para ser resolvido, seja necessário utilizar a Fórmula de Heron, envolvendo um contexto coerente com o seu município. Apresente a provável resolução da questão realizada por um estudante de 9º ano do Ensino Fundamental de sua região, explicando o seu entendimento.

APÊNDICE D: ETAPA LINGUAGEM EXTERNA : VERBALIZADA 1

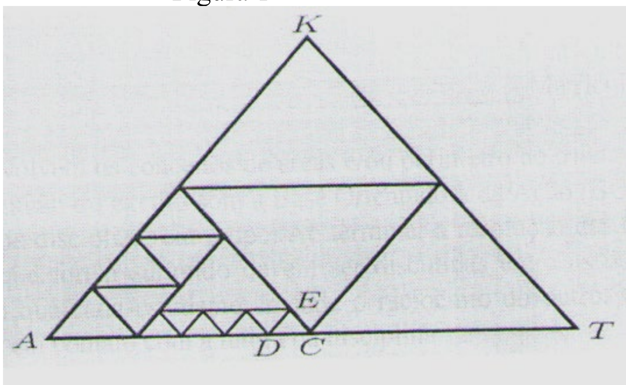
UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
3ª Tarefa em grupo - 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

Aluno(a) Executor(a): ___________________________________ Matrícula: ___________
Aluno(a) Avaliador(a): ___________________________________ Matricula: _____________

Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolvê-las, de **forma detalha (passo a passo), em dupla (participando os dois estudantes), sem a utilização do cartão** com a Base Orientadora da Ação (BOA), que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina, em grupo. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas que forem surgindo devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo, de modo que cada estudante entenda o raciocínio do outro. Caso a dúvida ainda persista o grupo deve entrar em contato com a tutora da disciplina.
Obs: **Todas as questões abaixo foram retiradas de livros didáticos do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, de livros do Ensino Médio e de exames de avaliação do MEC.**

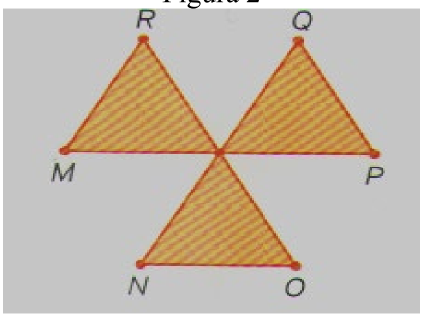
1 Na figura 1 todos os triângulos são equiláteros. Sendo o perímetro do triângulo AKT igual a 108 cm, calcule o perímetro do triângulo DEC.

Figura 1



2 A figura 2 M, N, O, P, Q R são pontos médios dos lados de um hexágono regular de lado 8m. Identifique a medida da área da figura 2.

Figura 2



3 Determine a área do triângulo cujo vértices têm as seguintes coordenadas: A(1,2), B(0,1) e C(4,5)

APÊNDICE D: ETAPA LINGUAGEM EXTERNA: VERBALIZADA 2

UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
4ª Tarefa em grupo - 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

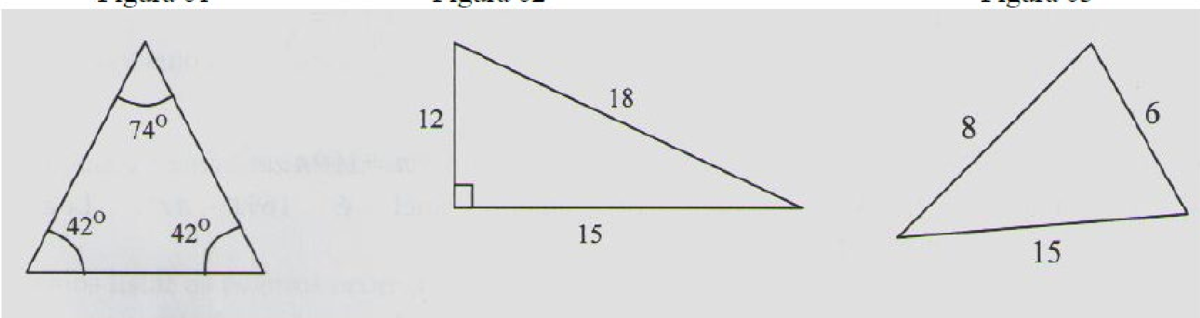
Aluno(a) Executor(a): ____ Matrícula: ___________
Aluno(a) Avaliador(a): _______________________________________ Matricula: ____________

Todas as tarefas abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolvê-las, de **forma detalha (passo a passo), em dupla (participando os dois estudantes), sem a utilização do cartão** com a Base Orientadora da Ação (BOA), que foi entregue na sala durante as oficinas da disciplina, em grupo. Ao terminar a resolução das questões (ou durante sua execução) as dúvidas que forem surgindo devem ser discutidas entre as duplas e solucionadas mediante diálogo, de modo que cada estudante entenda o raciocínio do outro. Caso a dúvida ainda persista o grupo deve entrar em contato com a tutora da disciplina.

Obs: **Todas as questões abaixo foram retiradas de livros didáticos do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental, de livros do Ensino Médio e de exames de avaliação do MEC.**

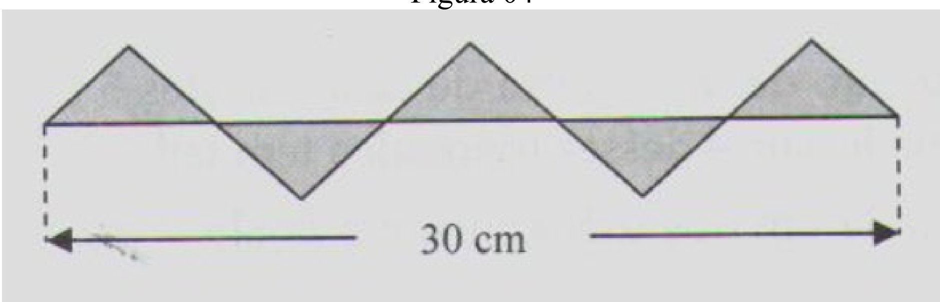
1 Quais as figuras estão corretas?

Figura 01 Figura 02 Figura 03



2 A figura 04 é composta de triângulos retângulos isósceles todos iguais. Qual é a área, em centímetros quadrados, da parte sombreada?

Figura 04



3 Determine a área dos triângulos cujos vértices têm as seguintes coordenadas: A(2,-3), B(1,2) e C(4,2)

APÊNDICE E: ETAPA LINGUAGEM INTERNA

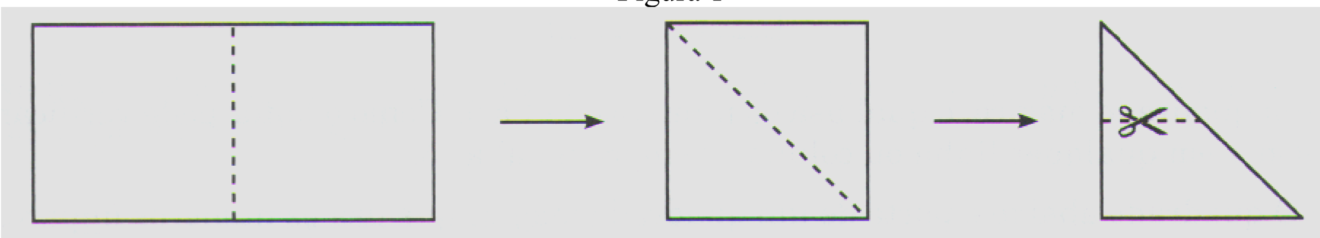
UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
5ª Tarefa individual – 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

Aluno (a): ____ Matrícula: ___________

Todas as questões abaixo envolvem os conceitos de áreas e/ou perímetro de triângulos. Resolva-as, de **forma detalha (passo a passo), sem a utilização do cartão – BOA, individualmente**.

1 Uma folha de papel é retangular, com base igual a 20 cm e altura 10 cm. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura 1, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.

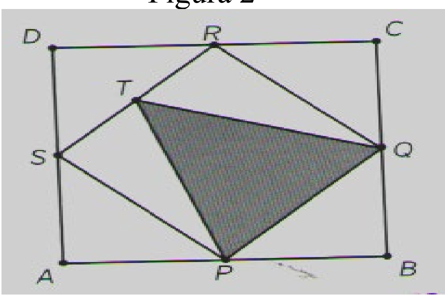
Figura 1



a) Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?
b) Qual a área da parte maior?
c) Qual a área da parte menor?

2 Na figura 2, o quadrado ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Pergunta-se: Qual á área do triângulo PQT?

Figura 2



3 . Quais as figuras estão corretas? Justifique.

Figura 3

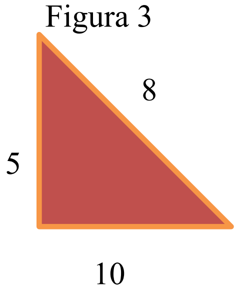


Figura 4

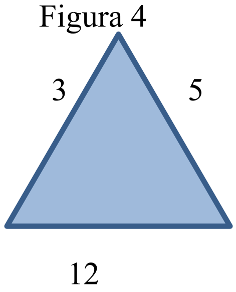
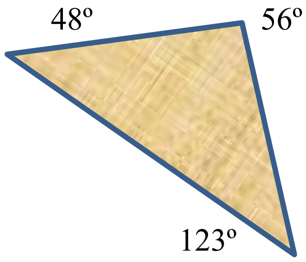


Figura 5



4 Dados os vértices A(8,3), B(X,7) e C(2,1), determine a abscissa X de um dos vértices desse triângulo cuja área vale 32 unidades de área.

APÊNDICE F: ETAPA MENTAL

UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Tópicos Especiais em Matemática II
6ª Tarefa individual – 2014.1
Professora: Severina Andréa Dantas de Farias

Aluno (a): ____ Matrícula: ___________

A tarefa abaixo deverá ser realizada **individualmente** pelo estudante, de forma **detalhada (passo a passo)**, **sem ajuda da BOA**, e deve envolver os conceitos de **áreas e/ou perímetro de triângulos** quaisquer.

Desejamos nesta tarefa identificar a sua criatividade sobre a temática em questão.

A Unidade IV do nosso livro texto oferece vários tipos de jogos e atividades que podem ser realizadas em sala de aula sobre temática da Geometria. Você poderá consultar a Unidade IV, site da internet, livros e outros materiais didáticos para realizar adaptações e elaborar a sua tarefa, contanto que a sua proposta seja original. Caso percebamos cópia idêntica desta tarefa em sites ou outros materiais, sua tarefa será anulada.

1 Você deve apresentar um jogo ou uma tarefa didática (resolução de problema, construção, problema histórico, dentre outros), que envolva o conteúdo de área e/ou perímetro de triângulos quaisquer, possível de ser aplicado em uma sala de aula do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. A proposta pode ser baseada em uma atividade já existente, mas você deve fazer alterações originais que demonstrem a sua criatividade na discussão do conteúdo matemático proposto. Escolha um nome para a sua atividade criativa e responda aos itens que seguem. Você pode fotografá-la e/ou filmá-la, usar computadores, calculadoras, cortar papel, ... e enviá-las também no seu arquivo. **Seja criativo!**

Nome da tarefa: ____

Ano adequado: ____

Conteúdo explorado: ____

Material utilizado: ____
____

Procedimentos: ____
____

Avaliação: ____
____

APÊNDICE G: ETAPA DE CONTROLE FINAL: aferição de retorno

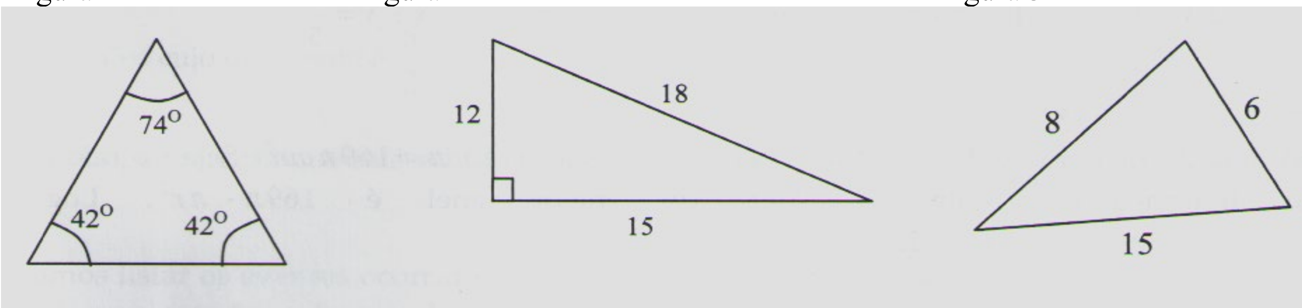
Aluno (a): ____ **Matrícula**: ________________
Pólo de apoio presencial: ________________________________ **Data:** _____/_____/_____

2 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

1 Nesse período discutimos muitas questões envolvendo conceitos geométricos. Construímos a Base Orientadora da Ação – BOA. Logo, esboce os itens que compõe a BOA para o Ensino Fundamental. Estes itens devem representar as características essenciais e relevantes do conteúdo matemático de área de triângulos quaisquer.

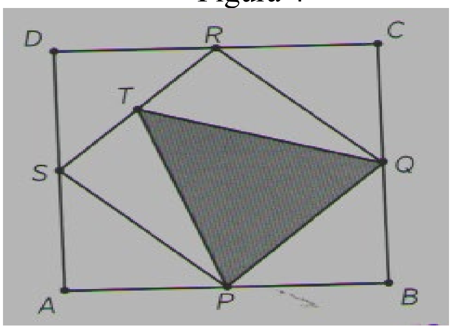
2 Quais as figuras estão corretas? Justifique a sua resposta.

Figura 1 Figura 2 Figura 3



3 Na figura 4, o quadrado ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Pergunta-se: Qual á área do triângulo PQT?

Figura 4



4 Resolva as seguintes questões:

a) Um fazendeiro queria cercar uma região plana triangular para plantar verduras. Sabendo que os lados da região medem 3 m, 4 m e 10 m, determine a área aproximada da região destinada ao plantio de verduras.

b) Elabore um problema que, para ser resolvido, seja necessário utilizar a Fórmula de Heron. O problema deve remeter a um contexto coerente do seu município. Apresente a resolução da questão.

5 Você deve apresentar um jogo (ou uma tarefa didática) que envolva o conteúdo de área e/ou perímetro de triângulos quaisquer, possível de ser aplicado em uma sala de aula do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Use sua criatividade.

Nome da tarefa: ____

Ano adequado: ____

Conteúdo explorado: ____

Material utilizado: ____
____

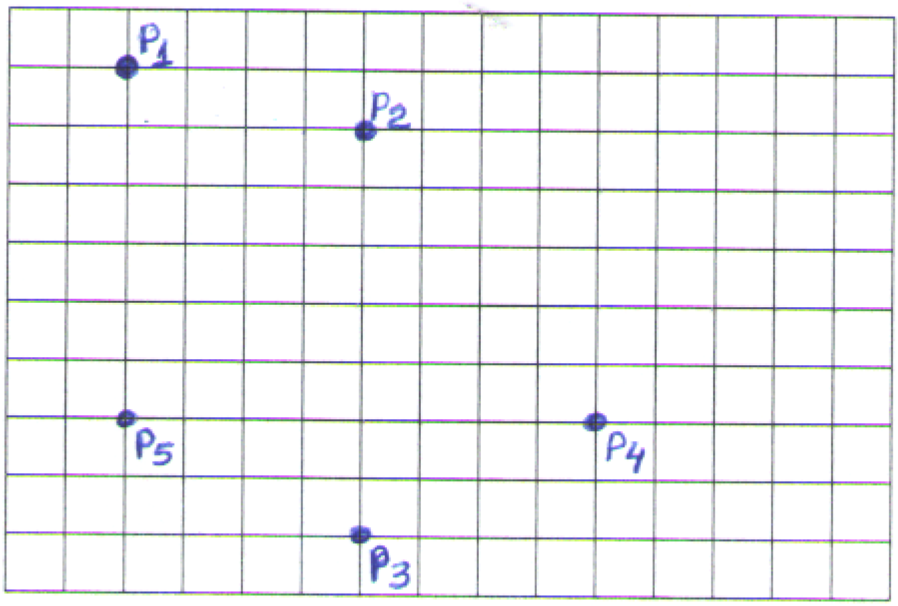
Procedimentos:
____
____
____

Avaliação:
____
____

APÊNDICE H: ETAPA DA AVALIAÇÃO DA RETENÇÃO DA ASSIMILAÇÃO DA AÇÃO E DO CONCEITO

1 - (Adaptada de UFRN, 2008) O piso de um salão de 4 m de largura por 6 m de comprimento é revestido com pedras de granito quadradas, como mostra a figura abaixo. Em cada uma das posições P1, P2, P3, P4 e P5 existe uma pessoa.

Figura 01- Piso de granito do salão



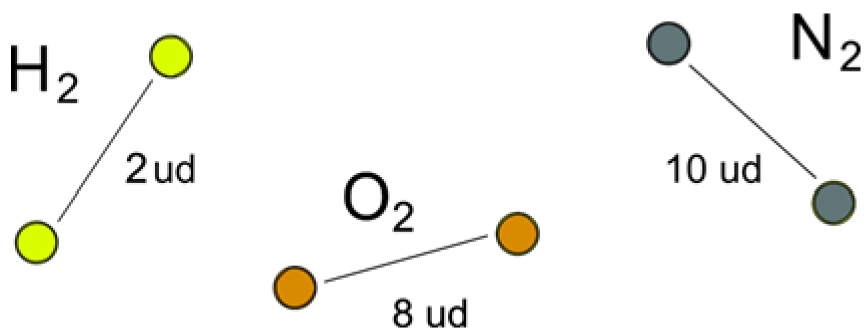
Com base nesta assertiva, responda:

a) Qual a distância entre as pessoas que estão nas posições P2 e P3? Justifique sua resposta.

b) Qual a distância entre as pessoas que estão nas posições P3 e P4? Justifique a sua resposta.

c) Qual a área interna da região do piso delimitada pelas pessoas P1, P2 e P4? Justifique a sua resposta.

2 - Na figura abaixo estão representadas moléculas dos gases hidrogênio, oxigênio e nitrogênio com as respectivas distâncias entre seus átomos em unidades de distâncias (ud). Calcule a área da região plana que podemos obter com as moléculas supondo que estas se unam por superposição das suas extremidades.



SOBRE A AUTORA

SEVERINA ANDRÉA DANTAS DE FARIAS

Professora da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, lotada no Departamento de Educação do Campo do Centro de Educação desta instituição. É Licenciada em Matemática, Mestre em Educação e Doutora em Educação. Atualmente, leciona disciplinas no curso de Licenciatura em Pedagogia do Centro de Educação e no Curso de Licenciatura em Matemática à Distância do Centro de Ciências Exatas e da Natureza nesta instituição de ensino. Desenvolve pesquisas direcionadas as metodologias de ensino de Matemática para aplicação na Educação Básica, no Ensino Superior e na Educação à Distância.

www.editorapublicar.com.br
contato@editorapublicar.com.br
@epublicar
facebook.com.br/epublicar

SEVERINA ANDRÉA DANTAS DE FARIAS

ASSIMILAÇÃO DE CONCEITOS NA MATEMÁTICA À DISTÂNCIA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Publicar Editora

2022

www.editorapublicar.com.br
contato@editorapublicar.com.br
@epublicar
facebook.com.br/epublicar

SEVERINA ANDRÉA DANTAS DE FARIAS

ASSIMILAÇÃO DE CONCEITOS NA MATEMÁTICA À DISTÂNCIA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Publicar Editora

2022